

**АЙНАКЕЕВА НУРСАУЛЕ ЖҰМАТҚЫЗЫ**

**Моделирование динамики термоупругих  
конструкций на графах**

8D05403 – Механика

Диссертация на соискание степени доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант:  
доктор физико-математических наук,  
профессор Алексеева Людмила Алексеевна

Зарубежный научный консультант:  
PhD, Приказчиков Данила Александрович  
(Keele University, UK)

Республика Казахстан  
Алматы, 2025

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ.....</b>	<b>4</b>
<b>ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ.....</b>	<b>5</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>6</b>
<b>1 ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ.....</b>	<b>15</b>
1.1 Уравнения связанной и несвязанной термоупругости. Основные параметры и соотношения динамики термоупругого стержня.....	15
1.2 Фундаментальные решения уравнений несвязанной термоупругости. Тензор Грина и его свойства.....	16
1.3 Построение матрицы фундаментальных решений в пространстве преобразования Фурье.....	18
1.3.1 Регуляризация трансформанты Фурье матрицы фундаментальных решений.....	20
1.3.2 Обратное преобразование Фурье. Тензор Грина.....	24
1.4 Динамика термоупругого стержня при действии импульсных сосредоточенных и распределенных источников. Численные расчеты.....	30
1.4.1 Численные расчеты тензора Грина. Ударные волны.....	42
1.4.2 Вычисление перемещений, температуры и напряжений в стержне.....	45
1.5 Задача Коши для уравнений термоупругости и ее решение.....	49
1.5.1 Постановка задачи Коши для уравнений несвязанной термоупругости.....	49
1.5.2 Постановка задачи Коши в пространстве обобщенных функций. Метод Владимиров В.С.....	50
1.5.3 Интегральное представление решения задачи Коши.....	51
<b>2 КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ И ИХ РЕШЕНИЯ. МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ.....</b>	<b>54</b>
2.1 Постановка нестационарных краевых задач термоупругости.....	54
2.2 Обобщенные решение начально-краевых задач. Метод обобщенных функций.....	56
2.3 Преобразование Фурье по времени фундаментальных решений и их свойства.....	58
2.4 Трансформанта Фурье по времени функции Грина уравнения теплопроводности.....	59
2.5 Решение температурных краевых задач в пространстве преобразования Фурье по времени.....	59
2.5.1 Температурное решение для Краевой задачи 1.....	61
2.5.2 Решение Краевой задачи 2. Задача Неймана.....	63
2.6 Решение упругой краевой задачи в пространстве преобразования Фурье по времени.....	64
2.6.1 Решение Краевой Задачи 1.....	66
2.6.2 Решение Краевой Задачи 2.....	67

2.7 Построение оригинала решения $u(x,t), \theta(x,t)$ .....	67
2.8 Динамика упругого стержня при стационарных и нестационарных колебаниях.....	71
2.8.1 Задача Дирихле.....	71
2.8.2 Задача Неймана-Дирихле.....	71
<b>3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ТЕРМОУПРУГИХ ГРАФАХ И ИХ РЕШЕНИЯ.....</b>	<b>73</b>
3.1 Краевые задачи теплопроводности на звездном графе.....	75
3.2 Уравнения связи краевых функций на ребрах теплового графа.....	76
3.3 Решение задачи Дирихле на тепловом графе.....	77
3.4 Решение стационарных краевых задач на двухзвенном тепловом графе.....	78
3.5 Краевые задачи на упругом звездном графе и их решения.....	81
3.6 Уравнения связи краевых функций на ребрах упругого графа.....	82
3.7 Решение задачи Дирихле на упругом звездном графе.....	83
3.8 Решение стационарных краевых задач на двухзвенном упругом графе.....	85
3.9 Краевые задачи на термоупругом звездном графе и их решения.....	87
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>90</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....</b>	<b>91</b>

## **НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ**

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:  
ГОСО РК 5.04.034 – 2011: государственный общеобязательный стандарт образования Республики Казахстан. Послевузовское образование. Докторантура. Основные положения (изменения от 23 августа 2012г. №1080);

ГОСТ 7.32-2001. Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления;

ГОСТ 7.1-2003. Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общее требование и правила составления.

## ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$u(x, t)$  – перемещение стержня в сечении  $x$  в момент времени  $t$

$\theta(x, t)$  - температура стержня в сечении  $x$  в момент времени  $t$

$F_1(x, t)$  - сила в сечении  $x$  в момент времени  $t$

$F_2(x, t)$  - мощность теплового источника в сечении  $x$  в момент времени  $t$

$\rho$  - погонная плотность масса

$c$  – скорость распространения упругих волн в стержне

$k$  – коэффициент теплопроводности

$U_j^k(x, t)$  - тензор Грина

$\tilde{U}_j^k(x, \omega)$  - тензор Грина при стационарных колебаниях

$\omega$  - частота колебаний

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность задачи.** Термоупругость являясь обобщением классической теории упругости и теории теплопроводности, описывает широкий круг прикладных задач. Теория термоупругости получила существенное развитие в связи с разработкой и построением разнообразных современных конструкций, работающих в условиях интенсивных динамических и тепловых нагрузок. Стержневые конструкции широко используются и в машиностроении как соединительные и передаточные звенья различных механизмов и машин. В процессе эксплуатации эти системы подвергаются различным термическим и механическим воздействиям, которые создают сложное напряженно-деформированное состояние в этих конструкциях. В этих условиях возрастают и требования по надежности и безопасности. Определение термонапряженного состояния стержневых конструкции (СК) является актуальной научно-технической задачей.

**Цель работы.** Исследование напряженно-деформированного состояния термоупругих стержневых конструкций на графах с учетом их физико-механических и геометрических параметров в условиях воздействия нестационарных и периодических силовых и тепловых нагрузок.

### **Задачи работы.**

1. Построение фундаментальных и обобщенных решений уравнений динамики термоупругих стержней. Построение тензора Грина уравнений несвязанной термоупругости и исследование его свойств. Численная реализация.
2. Построение и решение методом Владимирова В.С. задачи Коши динамики термоупругого стержня. Численная реализация, расчет термонапряженно-деформированного состояния стержня и анализ решения.
3. Постановка и аналитическое решение краевых задач динамики термоупругих стержней методом обобщенных функций при периодических и нестационарных внешних силовых и тепловых воздействиях.
4. Численная реализация первой и второй краевых задач динамики термоупругого стержня при периодических внешних силовых и тепловых воздействиях. Расчет перемещений и температуры для различных материалов при периодических колебаниях температуры и напряжений на концах стержня. Определение термонапряженного состояния и его анализ.
5. Постановка и аналитическое решение краевых задач теплопроводности на звездном графе при заданных температурах либо тепловых потоков на его концах (условия Дирихле или Неймана)
6. Постановка и аналитическое решение краевых задач динамики упругого и термоупругого N-звездного графа при заданных нестационарных и периодических перемещениях концов графа и температуры либо напряжений и тепловых потоков на его концах.
7. Численная реализация решение краевых задач теплопроводности на двухзвенном графе при периодических изменениях температуры или тепловых потоков на его концах. Анализ влияния частоты колебаний и тепловых параметров на тепловое состояние графа.

8. Численная реализация решение краевых задач динамики термоупругого двухзвенного графа при заданных периодических напряжениях и тепловых потоках на его концах. Определение термонапряженного состояния и многопараметрический анализ при разных частотах колебаний.

**Объект исследования.** Объектами исследования является термоупругие стержни и термоупругие стержневые конструкции – термоупругие графы.

**Предмет исследования.** Предметом исследования являются математические модели стержневых конструкций на основе математических моделей несвязанной термоупругости, которые описываются системами гипербола-параболических уравнений в частных производных и краевые задачи для них.

**Применяемые методы исследования.** Математические методы теории уравнений в частных производных, преобразования Фурье и Лапласа, методы линейной алгебры, метод обобщенных функций, метод В. С. Владимирова, компьютерные эксперименты.

### **Научная новизна работы.**

С использованием теории обобщенных функции построены тензор Грина для уравнений несвязанной термоупругости и исследованы его свойства. Построены обобщённые решения уравнений динамики термоупругого стержня при произвольных тепловых и силовых воздействиях из класса обобщенных функций медленного роста, что позволяет исследовать термонапряженное состояние стержней при воздействиях ударных силовых и тепловых нагрузок.

Разработан метод обобщённых функций для решения нестационарных и стационарных краевых задач термодинамики стержней конечной длины и построены аналитические решения восьми краевых задач при периодических и нестационарных внешних силовых и тепловых воздействиях.

Выполнена численная реализация первой и второй краевых задач динамики термоупругого стержня при периодических внешних силовых и тепловых воздействиях. Проведены расчёты перемещений и температурного поля стержня, определено его термонапряженное состояние. Использование безразмерных параметров позволяет обобщить результаты для материалов с различными термодинамическими характеристиками.

На основе метода обобщенных функций разработана методика решения краевых задач на N-звездном тепловом графе при заданных температурах либо тепловых потоков на его концах. Построены разрешающие системы уравнений для определения температуры каждого звена графа при любых геометрических и тепловых параметрах звеньев графа. Построены аналитические формулы расчета, которые позволяют исследовать тепловое состояние графа при периодических колебаниях. Для нестационарных задач используется обратное преобразование Фурье.

На основе метода обобщенных функций разработана методика решения краевых задач на N-звездном упругом графе при заданных перемещениях либо напряжениях на его концах. Построены разрешающие системы уравнений для определения перемещений, деформаций и напряжений каждого звена графа при любых геометрических и упругих параметрах звеньев графа. Построены аналитические формулы расчета, которые позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние упругого графа при периодических колебаниях. Для нестационарных задач используется обратное преобразование Фурье.

С использованием решений краевых задач на тепловом и упругом графах разработана методика решения стационарных и нестационарных краевых задач на N-звездном термоупругом графе при заданных перемещениях либо напряжениях, температуры либо тепловых потоков на его концах.

Для проверки разработанной методики проведена численная реализация решений краевых задач с условиями Дирихле и Неймана на термоупругих стержнях конечной длины и двухзвенном тепловом и упругом графах. Проведенные численные эксперименты показали высокую точность разработанного метода решения задач на графах. Достоинством этого метода является возможность его использования на графах любой структуры. Например, линейных и сетевых структурах.

#### **Научные положения, выносимые на защиту:**

1. Построены фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругого стержня. Построен тензор Грина уравнений несвязанной термоупругости и исследованы его свойства. Проведена численная реализация тензора и исследованы его свойства при разных термоупругих параметрах.
2. Построено решение задачи Коши динамики термоупругого стержня. Выполнена численная реализация, проведен расчет термонапряженно-деформированного состояния стержня и анализ решения.
3. Поставлено восемь краевых задач динамики термоупругого стержня конечной длины при периодических и нестационарных внешних силовых и тепловых воздействиях на его концах. Методом обобщенных функций построены их решения в аналитическом виде.
4. Выполнена численная реализация первой и второй краевой задачи динамики термоупругого стержня при периодических внешних силовых и тепловых воздействиях. Сделан расчет перемещений и температуры стержня при периодических колебаниях температуры и напряжений на концах стержня. Определено его термонапряженное состояние. Проведенные расчеты в безразмерных параметрах позволяют определять термонапряженное состояние стержня из различных материалов с учетом их термодинамических параметров.
5. Постановлена первая краевая задача термодинамики N-звездного графа при заданных нестационарных и периодических перемещениях концов графа и

- температуры на его концах. Построено ее аналитическое решение в пространстве преобразований Фурье по времени, которое определяет температуру и перемещение на каждом ребре графа.
6. Выполнена численная реализация решение первой краевой задачи динамики термоупругого двухзвенного графа при периодических колебаниях перемещений и температуры на его концах. Проведен многопараметрический анализ решение при разных частотах колебаний и термоупругих параметров среды.
  7. Постановлена вторая краевая задача термодинамики N-звездного термоупругого графа при заданных нестационарных и периодических напряжениях и тепловых потоков на его концах. Построено ее аналитическое решение в пространстве преобразований Фурье по времени, которое определяет температуру и перемещение на каждом ребре графа.
  8. Выполнена численная реализация решение второй краевой задачи динамики термоупругого двухзвенного графа при периодических колебаниях напряжений и тепловых потоков на его концах. Проведен многопараметрический анализ решение при разных частотах колебаний и термоупругих параметров среды.

**Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертации.** Достоверность результатов подтверждается применением классических математических моделей термоупругости, строгих аналитических методов решения поставленных краевых задач термодинамики стержневых конструкций с совпадением теоретически построенных решений с результатами их компьютерной реализации в системе MatCad 15 с высокой точностью при выполнениях численных экспериментов для разных геометрических и физико-механических параметров конструкций.

**Теоретическая и практическая значимость исследования.** Исследование динамики разнообразных сооружений и конструкций методом математического моделирования приводит к решению различных краевых задач математической физики с использованием математических моделей механики деформируемого твердого тела. Наиболее многочисленны исследования с использованием различных моделей теории упругости.

Поскольку многие конструкции работают при высоких температурах и при перепаде температур, при расчете термонапряженного состояния таких конструкций используется *теория температурных напряжений*. В связи с этим возникла новая область, называемая *термоупругостью*, которая представляет собой синтез классической теории упругости и теории теплопроводности на основе термодинамики необратимых процессов.

Последовательное рассмотрение процессов теплопроводности и упругого деформирования в их взаимосвязи возможно только на основе термодинамических соображений. Thomson J.J. [1] впервые применил основные законы термодинамики для изучения свойств упругого тела. Термоупругость как новая область механики начала интенсивно развиваться лишь в 80-х годах

прошлого столетия, хотя зависимость полей деформации и температуры постулировал еще Duhamel J.M. [2]. Обширные исследования в области термоупругости связаны с выходом работ Biot M.A. [3]. В них дается обоснованный, с использованием термодинамики необратимых процессов, вывод основных соотношений и уравнений термоупругости, а также сформулированы ее вариационные теоремы.

Полная система уравнений термоупругости связывает уравнения движения среды в перемещениях, в которое вводится градиент температуры, и уравнение теплопроводности с введением в него скорости объемной деформаций. При низких скоростях деформации в уравнении для температурного поля этим членом можно пренебречь. Теория для такой системы уравнений получила название *несвязанной термоупругости* или *теории температурных напряжений*. В настоящее время эта теория лежит в основе строительных норм проектирования сооружений и конструкций.

При исследовании динамических задач термоупругости учет связанности полей деформации и температуры дает возможность выявить новые качественные особенности протекания процесса деформирования. В частности, периодические воздействия характерны для самых разнообразных инженерных сооружений и конструкций, поэтому изучение их влияния на термонапряженное состояние конструкции и определение резонансных режимов является актуальной инженерно-технической задачей.

В книге Новацкого В. [4,5] подробно изложены математические модели для описания термонапряженного состояния деформируемых твердых тел и сред, движения которых, температура и напряженно-деформированное состояние зависят от действующих силовых и тепловых источников. Анализ решений задач о распространении термоупругих волн позволяет правильно понять основные черты термоупругих явлений при разных длинах волн и частотах колебаний и термоупругих параметрах материала. Такие исследования проводились в работах Новацкого В. и др. [4-11].

Для решения динамических задач упругости и термоупругости в трехмерных и двумерных областях со сложной геометрией разработан метод граничных интегральных уравнений в работах Купрадзе В.Д., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В., Гегелиа Т.Г., Fleurier J., Predeleanu M., Dargush G.E., Vanerdjee P.K., Sah J., Tasaka N. и др. [12-17].

Для решения нестационарных краевых задач несвязанной термоупругости МГИУ использовали Crouch S.L., Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Жанбырбаев Н.Б.[18-20].

Большой обзор работ для разных моделей термоупругих сред и состояний проведен в энциклопедии Hetnarski R. [8].

В самых различных областях техники очень широко используются стержневые элементы. Стержневые системы (фермы) широко используются в строительной механике как опорные конструкции мостов и линий электропередач. Их основным достоинством является высокая грузоподъемность при небольшом конструктивном весе. Стержневые конструкции широко используются в машиностроении как соединительные и

передаточные звенья различных механизмов и машин. В процессе эксплуатации эти системы подвергаются различным термическим и механическим воздействиям, которые создают сложное напряженно-деформированное состояние в этих конструкциях [7]. При деформировании тела от тепловых или механических воздействий, возникает эффект связанности: взаимодействие полей температуры и деформации. Неравномерное тепловое расширение вызывает тепловые напряжения. Это явление влечет за собой появление тепловых потоков внутри тела, возникновении связанных термоупругих волн и другие явления. Тепловые напряжения совместно с механическими напряжениями от действия внешних сил могут вызывать появление трещин, что в дальнейшем приводит к разрушению всей конструкции. Определение термонапряженного состояния стержневых конструкции в широком диапазоне внешних силовых и тепловых воздействий является актуальной научно-технической задачей.

Применение методов математического моделирования дает возможность проводить исследования физических процессов, протекающих в стержневых конструкциях и их элементах с учетом их теплофизических характеристик, и определять на этапе проектирования их термодинамическое состояние, которое, в свою очередь, является основой для прогнозирования поведения изделия в заданных условиях эксплуатации. При этом важна не только разработка расчетных моделей, но и разработка эффективных алгоритмов исследования моделей.

Стержневые конструкции часто имеют сложное строение, состоящее из стержней и связующих элементов с разными теплофизическими и геометрическими характеристиками. Для исследования таких конструкции удобно использовать теорию графов.

Понятие графа было впервые введено Леонардом Эйлером в 1736 году. В своей работе [21] он впервые применил теоретико-графовый подход для решения известной задачи о кёнигсбергских мостах. В начале XX века венгерский математик Денеш Кёниг первым предложил использовать термин «граф» по отношению к диаграммам, содержащим дискретное множество точек, соединённых прямыми линиями, и начал изучать их общие свойства. В 1936 году им была опубликована первая книга по теории графов [22], где был представлен обзор всех работ, начиная с 1736 года (см. также [23]).

Развитие аналитических и численных методов, направленных на математическое моделирование сетевых структур, основывается на анализе соответствующих прямых и обратных задач для систем уравнений с распределёнными параметрами на графах. В первую очередь это анализ спектральной полноты и свойства базисности собственных функций соответствующих краевых задач в пространстве квадратично интегрируемых функций, а также нахождение условий единственности решений обратных задач, приемлемых для практической реализации. История теории обыкновенных дифференциальных уравнений на сетях сравнительно недолгая. Большинство работ посвящено прямым задачам спектральной теории. Наиболее известны результаты Г. Люмера, Ю. Белова, С. Никаиза, О.Пенкина [24-26]. Другим не

менее важным направлением являются обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов на компактных графах. Фундаментальные работы в этой области принадлежат Г. Боргу, Б. Левитану и др. [27, 28], которые исследовали случаи полуоси и конечного интервала. Возникающие новые направления применения теории обратных задач для операторов Штурма–Лиувилля — например, краевые задачи с условиями разрыва внутри интервала, связанные с неоднородными свойствами среды — исследовались В. Проворотовым и другими [29–32]. Теория дифференциальных уравнений на сетях дала толчок к развитию исследований в области обратных задач на геометрических графах. Современное состояние теории обратных задач на графах можно проследить по основным статьям и монографиям В. Юрко [30, 31]. В работах [32–34] изучались свойства оператора Штурма–Лиувилля на геометрических графах, в частности, вопрос единственности решения обратной спектральной задачи с распределёнными параметрами на звёздном графе. Подход основывался на спектральных свойствах изучаемого эллиптического оператора, включая аналитичность функции Грина по спектральному параметру, а также спектральную полноту и базисность собственных функций.

Изучение волнового уравнения на графах является относительно новым направлением. Одной из первых работ в этом направлении была монография Ф. Али-Мехмети «Нелинейные волны в сетях» [35]. В этой работе было получено решение волнового уравнения в форме типа Д’Аламбера для графа с крестообразной структурой, состоящей из четырёх одинаковых рёбер. К. Каттанео и Л. Фонтана [36] применили формулу Д’Аламбера и нашли решение задачи Коши для волнового уравнения на конечных взвешенных сетях. Дж. Фридман и Ж.-П. Тийи [37] исследовали волновое уравнение, в котором оператор Лапласа задавался на рёбрах метрических графов. За последние десятилетия большинство работ было посвящено управляемости, наблюдаемости и стабилизации упругих систем (см. работы Кокса и С. Суаза [38] и других авторов [39–48]). В работах [49–53] исследовались краевые задачи для волнового уравнения на графах в различных постановках. Математическое моделирование процесса распространения тепла в системе стержней на графе типа «дерево» в виде пучка линейных дифференциальных операторов было выполнено Ю. Мартыновым [54].

Как видим, в настоящее время теория краевых задач на графах различной структуры начинает интенсивно развиваться.

В данной работе рассматриваются пространственно-одномерные нестационарные краевые задачи несвязанной термоупругости на звёздных графах, которые могут использоваться для исследования различных стержневых конструкций, типичных для инженерных применений. На основе теории обобщенных функций разработан унифицированный метод решения различных краевых задач теплопроводности и термоупругости на стержнях как конечной длины, так и на звёздных графах.

Следует отметить, что исследования термонапряженного состояния стержней конечной длины с различными физико-механическими свойствами ведутся немногими авторами, и в основном на основе численных методов

конечных элементов и конечных разностей для изучения статического и квазистатического напряжённого состояния стержней в работах Кудайкулова А., Жумадиллаевой А., Ташева А., Мищенко А. и др. [55-58]. Ранее в работах [59-63] были аналитически решены динамические стационарные и нестационарные краевые задачи для термоупругих стержней с использованием модели связанной термоупругости. Предложенный в этих работах подход, основанный на использовании метода обобщенных функций на стержнях конечной длины, использовался в диссертации для решения краевых задач на термоупругих графах с использованием модели несвязанной термоупругости. Отметим, что эта модель широко используется в нормах проектирования строительных сооружений, машин и механизмов. Поэтому проведенные в диссертации исследования будут востребованы на практике.

**Связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами.** Диссертационная работа выполнялась в рамках следующих проектов:

1) AP05132272 «Краевые задачи динамики деформируемых твердых и электромагнитных сред и их решение» КН МОН РК, 2018-2020 гг, № ГР 0118РК 00479.

2) AP09261033 «Исследование начально-краевых задач волнового уравнения на графах», грантовое финансирование научных исследований, КН МОН РК, 2021-2023 гг, № ГР 022РК00530

3) AP23488145 «Моделирование тепловых и волновых процессов в термоупругих стержневых конструкциях», грантовое финансирование научных исследований, КН МОН РК, 2024-2026 гг, № ГР 0124РК00588.

#### **Апробация работы.**

Основные результаты и положения диссертации были представлены и обсуждены на следующих научных конференциях:

1. Традиционная апрельская математическая конференция, Алматы, Казахстан, 2020.
2. SIJS Future Mechanics 2nd International Joldasbekov Symposium. Алматы, Казахстан, 2021.
3. Традиционная апрельская математическая конференция, Алматы, Казахстан, 2023.
4. VII World Congress of Mathematicians of the Turkic World TWMS Congress, Proceedings. Turkestan, Kazakhstan, 2023.
5. XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Санкт-Петербург, Россия, 2023.
6. International Mathematical Conference. Functional Analysis in Interdisciplinary Applications. Antalya, Turkey, 2023.
7. Annual International April Mathematical Conference, Almaty, Kazakhstan, 2024.

8. Традиционная международная апрельская математическая конференция. Алматы, Казахстан, 2024.
9. 8<sup>th</sup> International Conference on Mathematical Modeling, Computational Techniques and Simulation for Engineering. August 30 – September 1, Istanbul, Turkey, 2024.
10. International Conference on Generalized Functions. September 16-20, Torino, Italy, 2024.
11. Global Summit and Expo on Mechanical, Aerospace and Production Engineering (GSEMAPE 2024), December 02-04, Rome, Italy, 2024.
12. 14<sup>th</sup> AIMS Conference. December 16-20, Abu-Dhabi, UAE, 2024.
13. Annual International April Mathematical Conference, Almaty, Kazakhstan, 2025.

**Публикации.** Автором по теме диссертации опубликовано 10 статей в зарубежных и отечественных научных журналах, из них 3 публикации индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science и 3 статьи в научных изданиях, рекомендованных Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования (КОКШВО)

1. Lyudmila A. Alexeyeva, Assyat N. Dadayeva, Nursaule Zh. Ainakeyeva. Green tensor and regular solutions of equations of rods thermodynamics and their properties // Journal of Theoretical and Applied Mechanics 59 (2), pp. 227-238, Warsaw, 2021. (Scopus Q3, 46 percentile). <https://doi.org/10.15632/jtam-pl/133233>
2. L.A.Alexeyeva, A.N.Dadayeva, N.Zh.Ainakeyeva. Stationary boundary value problems on thermoelastic star graphs and their solutions. 9th International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and Industry (MCSI), P 111-114, 2024.(Scopus,Conference Paper) <https://doi.org/10.1109/MCSI63438.2024.00026>
3. L.A.Alexeyeva, D.A.Prikazchikov, A.N.Dadayeva, N.Zh.Ainakeyeva. solution of boundary value problems for a thermal star graph by generalized functions method. Bulletin of the Karaganda University. Physics Series. (на публикаций) (Web of science, Q2).
4. Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Айнакеева Н.Ж. Обобщенные решения краевых задач динамики термоупругих стержней // Вестник КазНУ, №2, стр 690-699, 2020.(КОКШВО).<https://doi.org/10.51301/vest.su.2020.v138.i2.134>  
<https://official.satbayev.university/download/document/14648/%D0%92%D0%95%D0%A1%D0%A2%D0%9D%D0%98%D0%9A-2020%20%E2%84%962.pdf>
5. Л.А.Алексеева, Д.А.Приказчиков, А.Н.Дадаева, Н.Ж.Айнакеева. Краевые задачи динамики термоупругих стержней и их решения // Вестник Национальной инженерной академии Республики Казахстан, № 4 (90), стр 156-168, 2023. (КОКШВО) <https://doi.org/10.47533/2023.1606-146X.43>
6. Айнакеева Н.Ж. Динамика термоупругого стержня при нестационарных тепловых и силовых воздействиях. Вестник КБТУ. №2(69), стр. 181-192, 2024. (КОКШВО) <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-181-192> .
7. L.A. Alexeyeva, D.A. Prikazchikov, A.N. Dadayeva, N.Zh. Ainakeyeva. Generalized solutions of boundary value problems of dynamics of thermoelastic rods. Kazakh

Mathematical journal. № 1(22), pp. 15-32, 2022.  
<https://doi.org/10.22541/au.164753242.28921971/v1>

8. Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh. Periodic boundary value problems on thermoelastic star graphs and their solutions by use general function method. Global Summit and Expo on Mechanical, Aerospace and Production Engineering (GSEMAPE2024), Acceloron aerospace journal (AAJ), Volume 3, Issue 6, December 02-04,2024.<https://acceloron.org.in/index.php/aaaj/article/view/200>
9. Ludmila Alexeyeva, Asiyat Dadayeva, Nursaule Ainakeyeva. General Function Method in Periodic Boundary Value Problems on Thermoelastic Star Graphs. International Journal of Mechanical Engineering. 2025.  
<http://www.iasas.org/iasas/journals/ijme>
10. N.Zh. Ainakeyeva, Lyudmila A. Alexeyeva, Danila A. Prikazchikov. Dirichlet and Neumann problems for the heat equation on linear multilink thermal graphs and their solutions// Kazakh Mathematical Journal. 25 (1), (2025), 28-42  
<https://doi.org/10.70474/3rsyzh34>

*Тезисы докладов.* Было опубликовано 13 тезисов на международных научных конференциях:

1. Айнакеева Н., Дадаева А. Метод В.С. Владимирова в задаче Коши динамики термоупругого стержня//Традиционная апрельская математическая конференция, Алматы, Казахстан. стр 145-146, 2020.  
[https://math.kz/public/filemanager/1/April\\_conference\\_2020.pdf](https://math.kz/public/filemanager/1/April_conference_2020.pdf)
2. Айнакеева Н.Ж. Тензор Грина уравнений несвязанной термоэластодинамики // SIJS Future Mechanics 2nd International Joldasbekov Symposium. Алматы, Казахстан. стр 11-17, 2021.
3. Л.А.Алексеева, А.Н.Дадаева, Н.Ж.Айнакеева. Метод обобщенных функций в краевых задачах динамики термоупругих стержней // Традиционная апрельская математическая конференция, Алматы, Казахстан, стр 163-164, 2023.
4. Lyudmila Alexeyeva, Asiyat Dadayeva, Nursaule Ainakeyeva. Boundary value problems of the dynamics of thermoelastic rods and their solutions // VII World Congress of Mathematicians of the Turkic World TWMS Congress, Proceedings. Turkestan, Kazakhstan. pp 376-382, 2023. [https://acagor.kz/media/uploads/twms-2023/Proceedings\\_part3.pdf](https://acagor.kz/media/uploads/twms-2023/Proceedings_part3.pdf)
5. Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Айнакеева Н.Ж. Обобщенные решения краевых задач динамики термоупругих стержней и их свойства // XIII Всероссийский съезд по теоретической и в прикладной механике. Санкт-Петербург, Россия. стр 41- 43, 2023. <https://doi:10.18720/SPBPU/2/id23-629>.
6. N.Zh.Ainakeyeva. Solution of the Cauchy problem of the dynamics of a thermoelastic rod using the Vladimirov method // International Mathematical Conference "Functional Analysis in Interdisciplinary Applications". Turkey, pp. 14-15, 2023.  
[https://www.faia2023.org/\\_files/ugd/ecc376\\_49ece923558a4531bb2adfabc6472057.pdf](https://www.faia2023.org/_files/ugd/ecc376_49ece923558a4531bb2adfabc6472057.pdf)
7. Ainakeyeva N. Dirichlet problem on a stellar thermal graph. Annual International April Mathematical Conference, Almaty, Kazakhstan. pp. 195-198, 2024.  
[https://math.kz/public/filemanager/userfiles/NEWS\\_2024/IMMM\\_April-2024.pdf](https://math.kz/public/filemanager/userfiles/NEWS_2024/IMMM_April-2024.pdf)

8. Алексеева Л.А., Арепова Г.Д., Айнакеева Н.Ж., Дадаева А.Н. Краевые задачи на волновых и тепловых графах и их решение методом обобщенных функций. Традиционная международная апрельская математическая конференция – 2024, Алматы, Казахстан. С. 14-16. РГП ИМММ. [https://math.kz/public/filemanager/userfiles/NEWS\\_2024/IMMM\\_April-2024.pdf](https://math.kz/public/filemanager/userfiles/NEWS_2024/IMMM_April-2024.pdf)
9. L.A.Alexeyeva, A.N.Dadayeva, N.Zh.Ainakeyeva. Stationary boundary value problems on thermoelastic star graphs and their solutions. 8th International Conference on Mathematical Modeling, Computational Techniques and Simulation for Engineering. August 30 – September 1, Istanbul, Turkey, 2024. <https://my.upatras.gr/8th-international-conference-on-mathematical-modelling-computational-techniques-and-simulation-for-engineering-istanbul-turkey-august-30/>
10. L.Alexeyeva, A.Dadayeva, G.Arepova, N.Ainakeyeva. Boundary value problems on wave and thermal graphs and their solution by the method of generalized functions. International Conference on GF2024 Generalized Functions. September 16-20, 2024, Torino, Italy. Book of abstracts. pp. 25-26. [https://drive.google.com/file/d/156BfDtCGMSv5iJCitg08aidfzXXCx\\_js/view](https://drive.google.com/file/d/156BfDtCGMSv5iJCitg08aidfzXXCx_js/view)
11. Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh. Periodic boundary value problems on thermoelastic star graphs and their solutions by use general function method. Global Summit and Expo on Mechanical, Aerospace and Production Engineering ( GSEMAPE2024), Acceloron aerospace journal (AAJ), Volume 3, Issue 6, December 02-04, 2024, <https://acceloron.org.in/index.php/aaj/article/view/200>
12. L.A.Alexeyeva, A.N.Dadayeva, N.Zh.Ainakeyeva. Dirichlet problem on a stellar thermoelastic graph and its solution. 14th AIMS Conference. December 16-20, 2024. Abu-Dbabi, UAE. <https://nyuad.nyu.edu/en/events/2024/december/aimsconference.html>
13. Alexeyeva L.A., Prikazchikov D.A., Ainakeyeva N.Zh. Robin’s problems for the heat equation on linear multilink thermal graphs and their solution. Annual International April Mathematical Conference, Almaty, Kazakhstan – pp. 208 – 210, 2025. [file:///C:/Users/1/Downloads/April\\_Conference\\_2025.pdf](file:///C:/Users/1/Downloads/April_Conference_2025.pdf)

### **Личный вклад автора**

Постановка краевых задач и методы исследования были предложены научными руководителями. Построение решений краевых задач, разработка алгоритмов и программная реализация их решений проводилось автором диссертации под их руководством. Анализ полученных решений и подготовка статей по материалам исследования проводилась совместно с научными руководителями. Оформление статей и представление их публикаций проводилась автором. Результаты исследований по теме диссертации на международных конференциях также представлялись автором.

**Структура и объем диссертации.** Объем диссертации из 110 страниц содержит: введение, три главы, заключение и библиографию из 72 наименований.

**Основное содержание диссертации.** В диссертации разработаны математические методы моделирования термодинамики стержневых конструкций на неоднородных звездных графах.

В первом разделе диссертации рассмотрена модель термоупругого стержня с использованием уравнений *несвязанной термоупругости*. Поставлена задача построения фундаментальных решения уравнений несвязанной термоупругости в пространственно-одномерном случае, описывающем динамику термоупругих стержневых конструкций под действием силовых и тепловых источников возмущений. На основе теории преобразования Фурье обобщенных функций, построен тензор Грина и обобщенные решения системы уравнений термоупругости для произвольных массовых сил и тепловых источников. Проведена компьютерная реализация тензора Грина и ряда построенных решений в системе Matcad 15. Приведены графики численных экспериментов, описывающих перемещения, температуру и напряжения в стержне при различных внешних воздействиях. Рассмотрена задача Коши для системы уравнений несвязанной термоупругости. С использованием метода Владимирова В.С. поставлена задача в пространстве обобщенных функций и получено ее обобщенное решение. Построено ее регулярное интегральное представление.

Во второй главе, на основе метода обобщенных функций, разработан метод решения краевых задач для стержней конечной длины при различных краевых условиях на перемещения, напряжения, температуру и тепловых потоки как на его концах, так и по длине стержня, которые можно использовать для исследования различных стержневых конструкций в условиях теплового нагрева. Преимущества метода обобщенных функции позволяет получить разрешающую систему уравнений, в которую входят начальные и краевые условия всех поставленных задач. Следовательно, нет необходимости решать каждую краевую задачу в отдельности. Особенность построенных решений делает их удобными для инженерных расчетов, т.к. позволяет исследовать влияние каждого краевого условия на концах стержня на его термонапряженное состояние. Особенность построенных решений делает их удобными для решения краевых задач на многозвенных графах.

В третьей главе, рассматриваются краевые задачи на звездном термоупругом графе, которые можно использовать для исследования различных стержневых конструкции в условиях теплового нагрева-охлаждения. На основе метода обобщенных функций построены обобщенные решения нестационарных прямых краевых задач термоупругости при действии силовых и тепловых источников различного типа на звездном графе. Получены разрешающие системы уравнений и регулярные интегральные представления обобщенных решений, которые дают аналитическое решение поставленных краевых задач.

# 1 ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

В данном разделе диссертации рассматривается математическая модель термоупругого стержня, основанная на системе уравнений несвязанной термоупругости в пространственно-одномерной постановке. Такая модель описывает динамику термоупругих стержневых конструкций под воздействием внешних силовых и тепловых источников. Поставлена задача построения фундаментальных решений данной системы уравнений с использованием аппарата обобщённых функций и преобразования Фурье. На этой основе построен тензор Грина, позволяющий получать обобщённые решения для произвольных распределений массовых сил и тепловых источников. Полученные решения обобщают классические подходы и позволяют описывать широкие классы динамических процессов в термоупругих телах. Выполнена численная реализация тензора Грина и ряда аналитических решений в программной среде Matcad-15. Приведены результаты численных экспериментов в виде графиков, иллюстрирующих поведение стержня (перемещения, температурное поле, напряжения) при различных типах внешних возмущений. Отдельно рассмотрена задача Коши для системы уравнений несвязанной термоупругости. С применением метода обобщённых функций в интерпретации В.С. Владимирова задача сформулирована в соответствующем функциональном пространстве, и получено её обобщённое решение. Построено регулярное интегральное представление решения, что позволило перейти от обобщённой постановки к пригодной для численного анализа форме.

## 1.1 Уравнения связанной и несвязанной термоупругости. Основные параметры и соотношения динамики термоупругого стержня

Рассматривается термоупругий стержень, который характеризуется линейной плотностью массы  $\rho$ , модулем Юнга  $E$ , скоростью распространения упругих волн в стержне  $c = \sqrt{\frac{\rho}{E}}$  и термоупругими константами:  $\gamma = \frac{\alpha}{E}$ ,  $\alpha$  - коэффициент теплового расширения,  $\kappa = \frac{k}{\rho c}$  - коэффициент температуропроводности и коэффициентом  $\eta$ , характеризующем влияние скорости деформаций на его температуру [4,5]. Исследуем термонапряженное состояние стержня под действием внешних воздействий, которые описываются системой дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma \theta_{,x} + \rho F_1(x,t) = 0 \\ \theta_{,xx} - k^{-1} \theta_{,t} - \eta u_{,xt} + F_2(x,t) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь  $u(x,t)$  - продольные перемещения сечений стержня,  $\theta(x,t)$  - относительная температура ( $\theta = T(x,t) - T(x,0)$ ,  $T$  - абсолютная температура),  $F_1(x,t)$  - продольная компонента внешней силы на единицу длины;  $F_2(x,t)$  - величина, характеризующая количество выделенного тепловыми источниками тепла на единицу длины за единицу времени. Здесь и далее для частных производных используем обозначения:

$$u_1 = u, u_2 = \theta, u_{,x} = \partial_x u_i \triangleq \frac{\partial u_i}{\partial x}, u_{,t} = \partial_t u_i \triangleq \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (i=1,2).$$

Систему уравнений (1.1) называют уравнениями *связанной термоупругости*. В ней в оба уравнения входят и перемещения, и температура. Эти уравнения используются при быстрых высокочастотных деформациях, т.к. при этом происходит разогрев тела. Здесь во втором уравнении это воздействие на температурное поле описывает третье слагаемое  $\eta u_{,xt}$ . Температурный член  $\gamma \theta_{,x}$  в первом уравнении для упругих перемещений позволяет учесть влияние на напряженное состояние стержня, которое описывается *законом Дюамеля-Неймана*:

$$\sigma = \rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta \quad (1.2)$$

При малых скоростях деформации, как показывают экспериментальные исследования, температурное поле практически от них не зависит. В этом случае в уравнении для температурного поля (1.1)<sub>2</sub> можно пренебречь третьим слагаемым ( $\eta = 0$ ). Такую систему называют *уравнениями несвязанной термоупругости*:

$$\begin{cases} \rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma \theta_{,x} + \rho F_1(x,t) = 0 \\ \theta_{,xx} - k^{-1} \theta_{,t} + F_2(x,t) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

При построении решений этой системы вначале можно определить температурное поле, решив параболическое уравнение теплопроводности (1.3)<sub>2</sub>, а затем можно построить решение гиперболического волнового уравнения для определения упругих перемещений (1.3)<sub>1</sub>. Такой метод построения различных частных решений этой системы использовался в работах разных авторов ранее.

При решении физических задач для описания импульсных и сосредоточенных сил, действующих на конструкции, используются сингулярные обобщенные функции [64]. Поэтому здесь строим решения системы (1.3) при произвольных  $F_1(x,t)$  и  $F_2(x,t)$  принадлежащих классу обобщенных функций медленного роста  $S'(R^2)$  с носителем  $\{x \in R^1, t \geq 0\}$  [65-66].

## 1.2 Фундаментальные решения уравнений несвязанной термоупругости. Тензор Грина и его свойства

Для построения решений этой системы будем рассматривать ее на пространстве обобщенных вектор функций, компоненты которых принадлежат  $S'(R^2)$ , при этом используем методы теории обобщенных функций [65-67]. Вначале построим фундаментальные решения этой системы.

Решения системы уравнений называются *фундаментальными*, если действующие источники возмущения имеют следующий вид

$$F_1 = \delta(x)\delta(t)\delta_1^j, \quad F_2 = \delta(x)\delta(t)\delta_2^j, \quad j = 1, 2 \quad (1.4)$$

Здесь  $\delta_i^j$  - символ Кронекера,  $\delta(\dots)$  - сингулярная  $\delta$ -функция Дирака. Такие функции описывают действие импульсных (мгновенных) сосредоточенных в начале координат силовых и тепловых источников возмущений. При  $j=1$  действует силовой источник. При  $j=2$  действует тепловой источник. Соответствующую матрицу фундаментальных решений обозначим  $U_i^j(x, t)$ .

Поскольку фундаментальные решения системы линейных уравнений определяются неоднозначно, с точностью до решений однородной системы уравнений, будем среди них искать то, которое удовлетворяет физическим условиям излучения. В частности, поскольку до нулевого момента времени стержень был в состоянии покоя, необходимо, чтобы

$$U_i^j(x, t) = 0, \quad t < 0, \quad \forall x \in R^1. \quad (1.5)$$

Поскольку действие источников сосредоточено в начале координат, то естественно предположить, что на бесконечности оно должно удовлетворять следующим условиям излучения

$$\begin{cases} U_i^j(x, t) \rightarrow 0, & t \rightarrow \infty, \quad \forall x, \\ U_i^j(x, t) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty, \quad \forall t. \end{cases} \quad (1.6)$$

Такое фундаментальное решение называется *тензором Грина* уравнений термоупругости.

Рассмотрим физический смысл компонент тензора Грина:

$U_1^1(x, t)$  - это перемещение в стержне при действии импульсной сосредоточенной силы (в точке  $x=0$ ):  $F_1 = \delta(x)\delta(t), F_2 = 0$ ;

$U_1^2(x, t)$  - это перемещение в стержне при действии сосредоточенного импульсного температурного источника:  $F_1 = 0, F_2 = \delta(x)\delta(t)$ ;

$U_2^1(x,t)$ - это температура стержня при действии импульсной сосредоточенной силы:  $F_1 = \delta(x)\delta(t)$ ,  $F_2 = 0$ ;

$U_2^2(x,t)$ - это температура стержня при действии сосредоточенного импульсного температурного источника:  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = \delta(x)\delta(t)$ .

Зная тензор Грина, можно построить решение системы (1.3) при любых источниках в виде тензорно-функциональной свертки:

$$u_j(x,t) = U_j^k(x,t) * F_k(x,t), \quad j,k = 1,2 \quad (1.7)$$

Для регулярных источников, которые описываются локально-интегрируемыми функциями, эту формулу можно записать в интегральном виде и использовать для вычислений:

$$u_j(x,t) = \iint_{R^2} U_j^k(x-y, t-\tau) * F_k(y, \tau) dy d\tau, \quad j,k = 1,2 \quad (1.8)$$

Для сингулярных источников следует использовать определение свертку в пространстве обобщенных функций [65,66].

### 1.3 Построение матрицы фундаментальных решений в пространстве преобразования Фурье

Для построения тензора Грина используем прямое и обратное преобразование Фурье по  $x, t$ . Для регулярных обобщенных функций оно имеет вид:

$$\bar{u}(\xi, \omega) = \iint_{R^2} u(x,t) e^{i(\xi x + \omega t)} dx dt \quad (1.9)$$

$$u(x,t) = \iint_{R^2} \bar{u}(\xi, \omega) e^{-i(\xi x + \omega t)} dx dt$$

Применим преобразование Фурье к системе (1.3), используя свойства преобразования Фурье производных [65,66].

$$\frac{\partial u}{\partial x} \leftrightarrow -i\xi \bar{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega \bar{u} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leftrightarrow (-i\xi)^2 \bar{u}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \leftrightarrow (-i\omega)^2 \bar{u}$$

В результате в пространстве преобразований Фурье трансформанта Фурье  $\bar{U}_i^j(\xi, \omega)$  матрицы фундаментальных решений  $U_i^j(x,t)$  удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} -c^2 \xi^2 \bar{U}_1^* + \omega^2 \bar{U}_1^* + i \tilde{\gamma} \xi \bar{U}_2^* + \delta_1^j = 0 \\ -\xi^2 \bar{U}_2^* + ik^{-1} \omega \bar{U}_2^* + \delta_2^j = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

$\tilde{\gamma} = \gamma / \rho$ . Разрешая ее по формулам Крамера, имеем

$$\bar{U}_1^j = \frac{\begin{vmatrix} -\delta_1^j & i \tilde{\gamma} \xi \\ -\delta_2^j & ik^{-1} \omega - \xi^2 \end{vmatrix}}{\Delta(\xi, \omega)} = \frac{\delta_1^j (\xi^2 - i \omega k^{-1}) + i \xi \tilde{\gamma} \delta_2^j}{\Delta(\xi, \omega)}$$

$$\bar{U}_2^j = \frac{\begin{vmatrix} \omega^2 - c^2 \xi^2 & -\delta_1^j \\ 0 & -\delta_2^j \end{vmatrix}}{\Delta(\xi, \omega)} = \frac{\delta_2^j (\xi^2 c^2 - \omega^2)}{\Delta(\xi, \omega)}$$

$$\bar{U}_1^j = \frac{\delta_1^j (\xi^2 - ik^{-1} \omega) + i \xi \tilde{\gamma} \delta_2^j}{\Delta(\xi, \omega)}, \quad \bar{U}_2^j = \frac{\delta_2^j (c^2 \xi^2 - \omega^2)}{\Delta(\xi, \omega)}, \quad i, j=1,2 \quad (1.12)$$

где определитель системы  $\Delta(\xi, \omega)$  равен

$$\Delta(\xi, \omega) = c^2 \xi^4 - \omega (\omega + ik^{-1} c^2) \xi^2 + ik^{-1} \omega^3 = c^2 (\xi^2 - \lambda_1) (\xi^2 - \lambda_2)$$

Корни определителя

$$\lambda_{1,2} = \frac{\omega (\omega + c^2 ik^{-1}) \pm \omega \sqrt{(\omega + c^2 ik^{-1})^2 - 4c^2 ik^{-1} \omega}}{2c^2}$$

$$\lambda_1 = \frac{\omega}{2c^2} \{ \omega + ic^2 k^{-1} + \omega - ic^2 k^{-1} \} = \frac{\omega^2}{c^2},$$

$$\lambda_2 = \frac{\omega}{2c^2} \{ \omega + ic^2 k^{-1} - \omega + ic^2 k^{-1} \} = i \omega k^{-1}.$$

Следовательно

$$\Delta(\xi, \omega) = (\xi^2 - ik^{-1} \omega) (c^2 \xi^2 - \omega^2) \quad (1.13)$$

Из формулы (1.12) следует лемма.

Лемма 1.1. Трансформанта Фурье матриц фундаментальных решений уравнений термоупругости (1.13) имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{U}_1^1(\xi, \omega) &= \frac{\xi^2 - ik^{-1}\omega}{\Delta(\xi, \omega)} & \bar{U}_1^2(\xi, \omega) &= \frac{i\gamma\xi}{\Delta(\xi, \omega)} \\ \bar{U}_2^1(\xi, \omega) &= 0 & \bar{U}_2^2(\xi, \omega) &= \frac{c^2\xi^2 - \omega^2}{\Delta(\xi, \omega)}\end{aligned}$$

Численное обращение трансформант преобразования Фурье по этим формулам невозможно, т.к. трансформанты Фурье (1.12) представляют собой целый класс фундаментальных решений, которые определяются с точностью до решения однородной системы уравнений (1.3). Как следует из (1.13) определитель обращается в ноль при действительных значения переменных Фурье. В вычислительном плане это проявляется в наличии неинтегрируемых особенностей при действительных  $(\xi, \omega)$ , что делает интегралы при обратном преобразовании расходящимися.

Для построения обратного преобразования следует регуляризовать формулы (1.12), которые определяются особенностями оригинала матрицы фундаментальных решений  $U_i^j(x, t)$ . В частности, условиями излучения (1.5), (1.6).

### 1.3.1 Регуляризация трансформанты Фурье матрицы фундаментальных решений

Для восстановления оригинала тензора Грина представим (1.12) в более удобном виде. Для этого разложим следующее выражение на более простые дроби:

$$\frac{1}{\Delta(\xi, \omega)} = \frac{1}{c^2(\xi^2 - \lambda_1)(\xi^2 - \lambda_2)} = \frac{1}{c^2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ \frac{1}{\xi^2 - \lambda_1} - \frac{1}{\xi^2 - \lambda_2} \right\}$$

В результате получим трансформанту Фурье тензора Грина в более удобном для построения оригинала виде.

Лемма 1.2. Трансформанта Фурье матриц фундаментальных решений уравнений термоупругости (1.13) представима в виде

$$\begin{aligned}\bar{U}_1^1(\xi, \omega) &= \frac{\xi^2 - ik^{-1}\omega}{c^2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ \frac{1}{\xi^2 - \lambda_1} - \frac{1}{\xi^2 - \lambda_2} \right\} \\ \bar{U}_1^2(\xi, \omega) &= \frac{i\gamma\xi}{c^2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ \frac{1}{\xi^2 - \lambda_1} - \frac{1}{\xi^2 - \lambda_2} \right\},\end{aligned}$$

$$\bar{U}_2^1(\xi, \omega) = 0, \quad \bar{U}_2^2(\xi, \omega) = \frac{c^2 \xi^2 - \omega^2}{c^2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ \frac{1}{\xi^2 - \lambda_1} - \frac{1}{\xi^2 - \lambda_2} \right\}. \quad (1.14)$$

Для восстановления оригиналов заметим, что выражениям, стоящим в числителях формул (1.14) в пространстве оригиналов соответствуют следующие дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} \delta_1^j (\xi^2 - i\omega k^{-1}) + i\xi \tilde{\gamma} \delta_2^j &\Leftrightarrow \delta_1^j (k^{-1} \partial_t - \partial_x \partial_x) - \tilde{\gamma} \delta_2^j \partial_x, \\ \delta_2^j (c^2 \xi^2 - \omega^2) &\Leftrightarrow \delta_2^j (\partial_t - c^2 \partial_x \partial_x). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Сумма в фигурных скобках содержит трансформанты Фурье фундаментальных решений уравнения Даламбера и уравнения теплопроводности.

Действительно, функция

$$\bar{f}_1(\xi, \omega) = \frac{1}{\xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad (1.16)$$

удовлетворяет уравнению

$$\left( \xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \bar{f}_1 = 1$$

которому в пространстве оригиналов соответствует волновое уравнение Даламбера для фундаментального решения:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \delta(t) \delta(x)$$

Фундаментальное решение этого уравнения хорошо известно [65,66]:

$$f_1(x, t) = \frac{c}{2} H(ct - |x|) \quad (1.17)$$

Здесь  $H(t)$  – функция Хэвисайда. Его преобразование Фурье является регуляризацией правой части (1.16)

$$\bar{f}_1(\xi, \omega) = \operatorname{Re} g \left[ \frac{c^2}{c^2 \xi^2 - \omega^2} \right] = \frac{c^2}{c^2 \xi^2 - (\omega + i0)^2} \quad (1.18)$$

которая определяет оригинал с носителем на положительной оси времени

Аналогично, функция

$$\bar{f}_2(\xi, \omega) = \frac{1}{\xi^2 - i\omega k^{-1}}$$

удовлетворяет уравнению

$$(\xi^2 - i\omega k^{-1})\bar{f}_2(\xi, \omega) = 1$$

которому в исходном пространстве соответствует параболическое уравнение теплопроводности для фундаментального решения:

$$k^{-1} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = \delta(t)\delta(x) \quad (1.19)$$

Его фундаментальное решение имеет вид [65,66]:

$$f_2(x, t) = \frac{H(t)k}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}, \quad (1.20)$$

$$\bar{f}_2(\xi, \omega) = \text{Reg} \left[ \frac{1}{\xi^2 - i\omega k^{-1}} \right] = \frac{k}{k\xi^2 - i(\omega + i0)}.$$

Обе функции удовлетворяют условиям:

$$f_j(x, t) = 0, \quad t < 0, \quad f_j(x, t) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad j=1,2 \quad (1.21)$$

Отсюда представим компоненты трансформанты Фурье тензора Грина в виде

$$\bar{U}_1^1(\xi, \omega) = \frac{\xi^2 - ik^{-1}\omega}{c^2(\lambda_1 - \lambda_2)} \{ \bar{f}_1(\xi, \omega) - \bar{f}_2(\xi, \omega) \},$$

$$\bar{U}_1^2(\xi, \omega) = \frac{i\gamma\xi}{c^2(\lambda_1 - \lambda_2)} \{ \bar{f}_1(\xi, \omega) - \bar{f}_2(\xi, \omega) \},$$

$$\bar{U}_2^1(\xi, \omega) = 0,$$

$$\bar{U}_2^2(\xi, \omega) = \frac{c^2\xi^2 - \omega^2}{c^2(\lambda_1 - \lambda_2)} \{ \bar{f}_1(\xi, \omega) - \bar{f}_2(\xi, \omega) \}.$$

Для восстановления оригинала знаменателя

$$\frac{1}{\omega(\omega - ic^2k^{-1})} = \frac{1}{\omega} \times \frac{1}{(\omega - ic^2k^{-1})}.$$

Рассмотрим преобразование Фурье функции Хэвисайда  $H(t)$ .

Формально вычисляя, получим

$$(H(t) + \text{const})' = \delta(t) \Rightarrow -i\omega \bar{H} = 1 \Rightarrow \bar{H} = \frac{1}{-i\omega}$$

Однако классического обратного преобразования Фурье у функции  $\frac{1}{-i\omega}$  нет, так как интегральная формула дает расходящийся интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega t)}{-i\omega} d\omega$$

А обобщенное преобразование Фурье функций Хэвисайда существует и его можно определить, используя сходящиеся последовательности свойство непрерывности преобразования Фурье в пространстве обобщенных функций:

$$\begin{aligned} \bar{H}(\omega) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{i\omega t - \varepsilon t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left. \frac{e^{(i\omega - \varepsilon)t}}{(i\omega - \varepsilon)} \right|_0^{\infty} = \\ &= -\frac{1}{i(\omega + i0)} = \text{Reg} \left[ -\frac{1}{i\omega} \right]. \end{aligned}$$

То есть

$$\text{Reg} \left[ -\frac{1}{i\omega} \right] = -\frac{1}{i(\omega + i0)} \leftrightarrow H(t),$$

Рассмотрим

$$\bar{g}_1(\xi, \omega) = \frac{1}{c^2 k^{-1} - i\omega},$$

Откуда получим

$$(c^2 k^{-1} - i\omega) \bar{g}_1 = 1.$$

Соответственно в исходном пространстве-времени имеем

$$\frac{dg_1}{dt} + c^2 k^{-1} g_1 = \delta(t),$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$g_1(t) = e^{-\frac{c^2 t}{k}} H(t). \quad (1.22)$$

Используя эти регуляризации и соответствующие им вспомогательные функции, можно построить тензор Грина.

### 1.3.2 Обратное преобразование Фурье. Тензор Грина

Для построения оригиналов используем свойств свертки обобщенных функций [65,66]:

$$h = f * g \leftrightarrow \bar{h} = \bar{f} \times \bar{g} \quad (1.23)$$

Для регулярных функций свертка представима в интегральном виде:

$$f * g = \int_{R^N} f(x-y)g(y)dy_1 \dots dy_N \quad (1.24)$$

Следовательно, используя (1.23), получим:

$$f_1(x,t) * H(t)\delta(x) = f_1 *_{t} H(t) \leftrightarrow \frac{\bar{f}_1(\xi, \omega)}{-i(\omega + i0)},$$

$$f_2(x,t) * H(t)\delta(x) = f_2 *_{t} H(t) \leftrightarrow \frac{\bar{f}_2(\xi, \omega)}{-i(\omega + i0)}.$$

$$\frac{1}{\omega} \times \frac{1}{(\omega - ic^2 k^{-1})} = \frac{1}{-i\omega} \times \frac{1}{(i\omega + c^2 k^{-1})} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow H(t)\delta(x) *_{t} g_1(t)\delta(x) = H(t) *_{t} g_1(t).$$

Вычислим эти свертки:

$$\begin{aligned} H(t) *_{t} H(t) e^{-\frac{c^2}{k}t} &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau)H(\tau) e^{-\frac{c^2}{k}t} d\tau = \\ &= H(t) \int_0^t e^{-\frac{c^2}{k}t} d\tau = -\frac{k}{c^2} H(t) \left( e^{-\frac{c^2}{k}t} - 1 \right), \end{aligned}$$

$$-\frac{k}{c^2} H(t) \left( e^{-\frac{c^2}{k}t} - 1 \right) * cH(ct - |x|) = -\frac{k}{c} H(t) \left( e^{-\frac{c^2}{k}t} - 1 \right) * H(ct - |x|) =$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{k}{c} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau) e^{-\frac{c^2}{k}(t-\tau)} H(c\tau - |x|) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau) H(c\tau - |x|) d\tau \right\} = \\
& = -\frac{k}{c} H(ct - |x|) \left\{ \int_{|x|/c}^t e^{-\frac{c^2}{k}(t-\tau)} d\tau - \int_{|x|/c}^t 1 d\tau \right\} = \\
& = \frac{k}{c} H(ct - |x|) \left\{ \frac{k}{c^2} \left( 1 - e^{-\frac{c}{k}(|x|-ct)} \right) + t - \frac{|x|}{c} \right\}, \\
& -\frac{k}{c^2} H(t) \left( e^{-\frac{c^2}{k}t} - 1 \right) * \frac{kH(t)}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} = \\
& = -\frac{k^2}{2c^2\sqrt{\pi k}} H(t) \left\{ \int_0^t \frac{e^{-\frac{c^2}{k}(t-\tau)} e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau) \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} H(\tau) d\tau \right\} = \\
& = AH(t) \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{-\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau \right\},
\end{aligned}$$

где  $A = -\frac{k^2}{2c^2\sqrt{\pi k}}$ . Введем новые обозначения:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(x, t) &= \frac{k}{c} H(ct - |x|) \left[ \frac{k}{c^2} \left( 1 - e^{-\frac{c}{k}(|x|-ct)} \right) + t - \frac{|x|}{c} \right], \\
\Sigma_2(x, t) &= AH(t) \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{-\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau \right\}, \\
\Sigma_3(x, t) &= H(t) \int_0^t e^{-\frac{c^2}{k}\tau} d\tau = -\frac{k}{c^2} H(t) (e^{-\frac{c^2}{k}t} - 1).
\end{aligned}$$

Построим тензор Грина, используя (1.16) и введенные вспомогательные функций.

В представлении трансформанты Фурье тензора Грина (1.16) в числителе стоят трансформанты Фурье дифференциальных операторов. Поэтому, с учетом введенных обозначений,

$$U_1^j(x,t) = \left[ \delta_1^j \left( k^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) k^{-1} - \delta_2^j \gamma \frac{\partial}{\partial x} \right] (\Sigma_1(x,t) - \Sigma_2(x,t)),$$

(1.25)

$$U_2^j(x,t) = \left[ \delta_2^j \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] (\Sigma_1(x,t) - \Sigma_2(x,t)).$$

**Т е о р е м а 1.1.** *Компоненты тензора Грина уравнений термоупругости (1.3) имеют вид*

$$U_1^j(x,t) = \delta_1^j k^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \delta_1^j \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} - \delta_2^j \tilde{\gamma} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} - \delta_1^j \Sigma_3(t) \delta(x) + \delta_2^j \tilde{\gamma} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x},$$

$$U_2^j(x,t) = \delta_2^j c^2 \Sigma_3(x,t) + \delta_2^j c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} - \delta_2^j \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2}.$$

где  $j=1,2$ , а входящие в формулы производные вычисляются по следующим формулам:

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} = -\frac{k}{c} H(ct - |x|) \left[ e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} - 1 \right],$$

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} = \frac{k}{c^2} H(ct - |x|) \operatorname{sgn} x \left[ e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} + 1 \right],$$

$$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} = -\frac{AH(t)}{k} \left\{ e^{\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau} \frac{x^2}{4k\tau}}{\sqrt{\tau}} \frac{x}{2\tau} d\tau - \int_0^t \frac{e^{\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \frac{x}{2\tau} d\tau \right\},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2} &= AH(t) \left\{ \frac{c^4}{k^2} e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau - \frac{c^2}{k} e^{-\frac{c^2}{k}t} \frac{e^{\frac{c^2}{k}t - \frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{t}} \right\} - \\ &\quad - AH(t) \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \frac{e^{\frac{c^2}{k}t - \frac{x^2}{4kt}}}{k\sqrt{t}} \left( c^2 - \frac{x^2}{4t^2} \right) + \frac{x^2}{4kt^2} \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{t}} \right\}, \\ \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} &= \frac{AH(t)}{2k} \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \left[ \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\tau\sqrt{\tau}} \left( \frac{x^2}{2k\tau} - 1 \right) d\tau \right] - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\tau\sqrt{\tau}} \left( \frac{x^2}{2k\tau} - 1 \right) d\tau \right\}, \\ \Sigma_3(x,t) &= -\frac{k}{c^2} H(t) (e^{-\frac{c^2}{k}t} - 1). \end{aligned}$$

*Доказательство* основано на дифференцировании введённых разрывных функций с учетом правил дифференцирования таких функций в пространстве обобщенных функций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} &= \overbrace{k\delta(ct - |x|)}^{=0} \left[ \frac{k}{c^2} \left( 1 - e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} \right) + t - \frac{|x|}{c} \right] + \frac{k}{c} H(ct - |x|) \left[ -e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} + 1 \right] = \\ &= -\frac{k}{c} H(ct - |x|) \left[ e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} - 1 \right], \\ \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} &= \overbrace{\frac{k}{c} [\delta(x+ct) - \delta(x-ct)]}^{=0} \cdot \left[ \frac{k}{c^2} \left( 1 - e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} \right) + t - \frac{|x|}{c} \right] + \\ &\quad + \frac{k}{c} H(ct - |x|) \left[ -\frac{k}{c^2} e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} \frac{c}{k} \operatorname{sgn} x - \frac{\operatorname{sgn} x}{c} \right] = \\ &\quad - \frac{k}{c} H(ct - |x|) \left[ \frac{1}{c} e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} \operatorname{sgn} x + \frac{\operatorname{sgn} x}{c} \right]. \end{aligned}$$

Здесь сумма первых двух слагаемых равна нулю, т.к. на носителе простого слоя

$$\delta(ct - |x|).$$

$$\left[ \frac{k}{c^2} \left( 1 - e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} \right) + t - \frac{|x|}{c} \right]_{|x|=ct} \stackrel{=0}{=} \frac{k}{c^2} (1 - e^0) + 0 = 0.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} &= \frac{k}{c} \left[ \delta(x+ct) - \delta(x-ct) \right] \cdot \left[ \frac{1}{c} e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} \operatorname{sgn} x + \frac{\operatorname{sgn} x}{c} \right] - \\ &= \frac{k}{c} H(ct - |x|) \left\{ \frac{1}{c} \left( \frac{c}{k} e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} \operatorname{sgn}^2 x + e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} 2\delta(x) \right) + \frac{2}{c} \delta(x) \right\} = \\ &= \frac{k}{c} H(ct - |x|) \left\{ \frac{1}{c} \left( \frac{c}{k} e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} \operatorname{sgn}^2 x + e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} 2\delta(x) \right) + \frac{2}{c} \delta(x) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial t} &= A \delta(t) \left\{ e^{-\frac{c^2}{k} t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k} \tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau \right\} + \\ &+ AH(t) \left\{ \left[ -\frac{c^2}{k} e^{-\frac{c^2}{k} t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k} \tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau + e^{-\frac{c^2}{k} t} \frac{e^{\frac{c^2}{k} t - \frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{t}} - \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{t}} \right] \right\} = \\ &- AH(t) \left\{ \frac{c^2}{k} e^{-\frac{c^2}{k} t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k} \tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau - e^{-\frac{c^2}{k} t} \frac{e^{\frac{c^2}{k} t - \frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{t}} + \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{t}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} &= AH(t) \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \left( -\frac{x}{2k\tau} \right) d\tau - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \left( -\frac{x}{2k\tau} \right) d\tau \right\} = \\
&= -AH(t) \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \frac{x}{2k\tau} d\tau - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \frac{x}{2k\tau} d\tau \right\}, \\
\frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} &= -AH(t) e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \left( -\frac{x}{2k\tau} \right) \frac{x}{2k\tau} d\tau - AH(t) e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \frac{1}{2k\tau} d\tau - \\
&\quad - AH(t) \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \left( -\frac{x}{2k\tau} \right) \frac{x}{2k\tau} d\tau - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \frac{1}{2k\tau} d\tau = \\
&= AH(t) e^{-\frac{c^2}{k}t} \left[ \int_0^t \frac{x^2}{4k^2 \tau^2 \sqrt{\tau}} \left( e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}} \right) - \int_0^t \frac{1}{2k\tau \sqrt{\tau}} \left( e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}} \right) \right] - \\
&\quad - AH(t) \left[ \int_0^t \frac{x^2}{4k^2 \tau^2 \sqrt{\tau}} e^{-\frac{x^2}{4k\tau}} d\tau - \int_0^t \frac{1}{2k\tau \sqrt{\tau}} e^{-\frac{x^2}{4k\tau}} d\tau \right] = \\
&= \frac{AH(t)}{2k} \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \left[ \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\tau \sqrt{\tau}} \left( \frac{x^2}{2k\tau} - 1 \right) d\tau \right] - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\tau \sqrt{\tau}} \left( \frac{x^2}{2k\tau} - 1 \right) d\tau \right\}, \\
\frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2} &= A\delta(t) \overbrace{\left[ \left[ \frac{c^2}{k} e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau - e^{-\frac{c^2}{k}t} \frac{e^{\frac{c^2}{k}t - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{t}} + \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{t}} \right] \right]}{=0} - \\
&= AH(t) \left[ \frac{c^2}{k} e^{-\frac{c^2}{k}t} \left( -\frac{c^2}{k} \right) \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau + \frac{c^2}{k} e^{-\frac{c^2}{k}t} \frac{e^{\frac{c^2}{k}t - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{t}} \right] - \\
&\quad - \left\{ AH(t) \left[ e^{-\frac{c^2}{k}t} \left( -\frac{c^2}{k} \right) \frac{e^{\frac{c^2}{k}t - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{t}} + e^{-\frac{c^2}{k}t} \left( \frac{e^{\frac{c^2}{k}t - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{t}} \right) \left( -\frac{x^2}{4k} \right) \left( -\frac{1}{t^2} \right) \right] + AH(t) \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{t}} \left( -\frac{x^2}{4k} \right) \left( -\frac{1}{t^2} \right) \right\} =
\end{aligned}$$

$$= AH(t) \left\{ \frac{c^4}{k^2} e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau - \frac{c^2}{k} e^{-\frac{c^2}{k}t} \frac{e^{\frac{c^2}{k}t - \frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{t}} \right\} -$$

$$- AH(t) e^{-\frac{c^2}{k}t} \frac{e^{\frac{c^2}{k}t - \frac{x^2}{4kt}}}{k\sqrt{t}} \left( c^2 - \frac{x^2}{4t^2} \right) - \frac{x^2}{4kt^2} \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{t}}.$$

#### 1.4 Динамика термоупругого стержня при действии импульсных сосредоточенных и распределенных источников. Численные расчеты

В системе MatCad-15 разработана программа расчета трансформанты Фурье матрицы фундаментальных решений  $\bar{U}_i^j(\xi, \omega)$  (Приложение 1). Проведены расчеты компонент этой матрицы. На рисунках 1.1 (а,б,в,г) представлены реальная и мнимая часть компонент матрицы фундаментальных решений  $\bar{U}_i^j(\xi, \omega)$  при условных расчетных параметрах термоупругой среды, указанных в надписях к рисунку. На рисунках 1.1-1.4 используются следующие обозначения:

RFU11(  $\xi_n, l$ ) - значение действительной части комплексной компоненты трансформанты матрицы фундаментальных решений;

IFU11(  $\xi_n, l$ ) - значение мнимой части комплексной трансформанты матрицы фундаментальных решений.

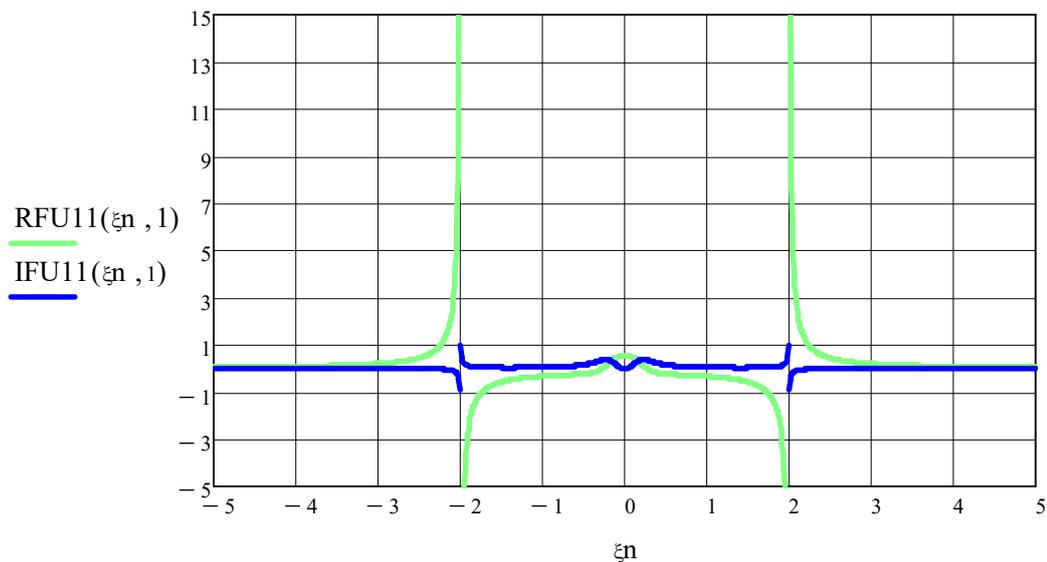


Рисунок 1.1- Изменение  $\text{Re}\bar{U}_1^1(\xi, \omega)$  и  $\text{Im}\bar{U}_1^1(\xi, \omega)$

при фиксированном  $\omega$ :  $\omega = 1$

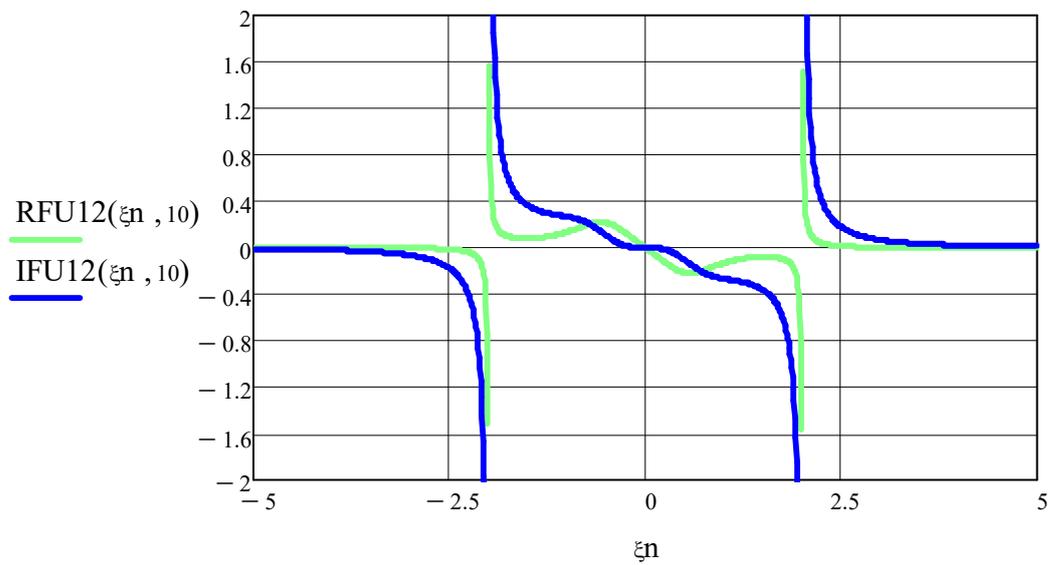


Рисунок 1.2- Изменение  $\text{Re}\bar{U}_1^2(\xi, \omega)$  и  $\text{Im}\bar{U}_1^2(\xi, \omega)$   
при фиксированном  $\omega: \omega = 1$

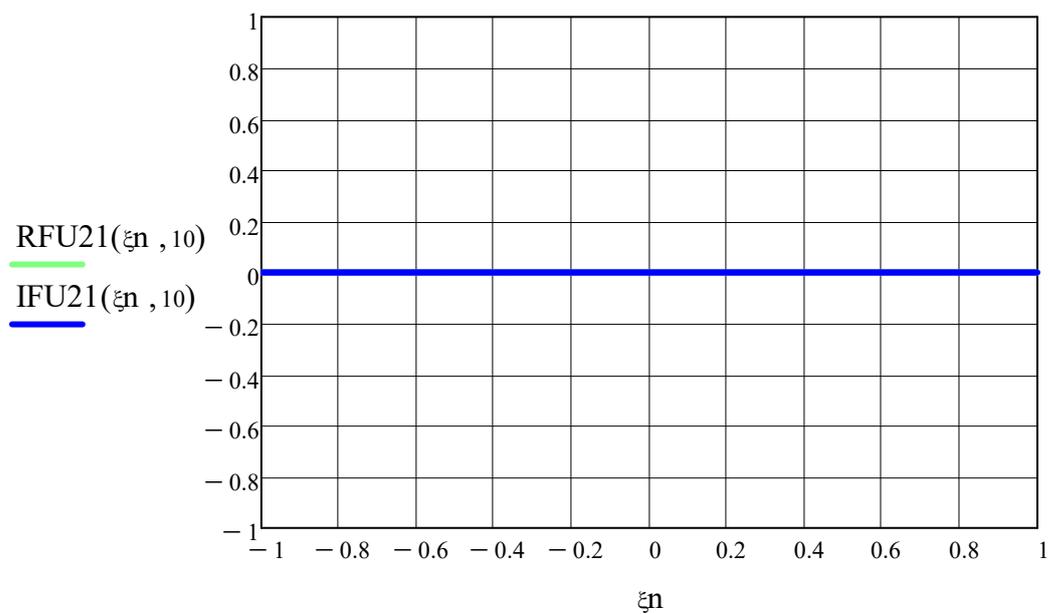


Рисунок 1.3- Изменение  $\text{Re}\bar{U}_2^1(\xi, \omega)$  и  $\text{Im}\bar{U}_2^1(\xi, \omega)$   
при фиксированном  $\omega: \omega = 1$

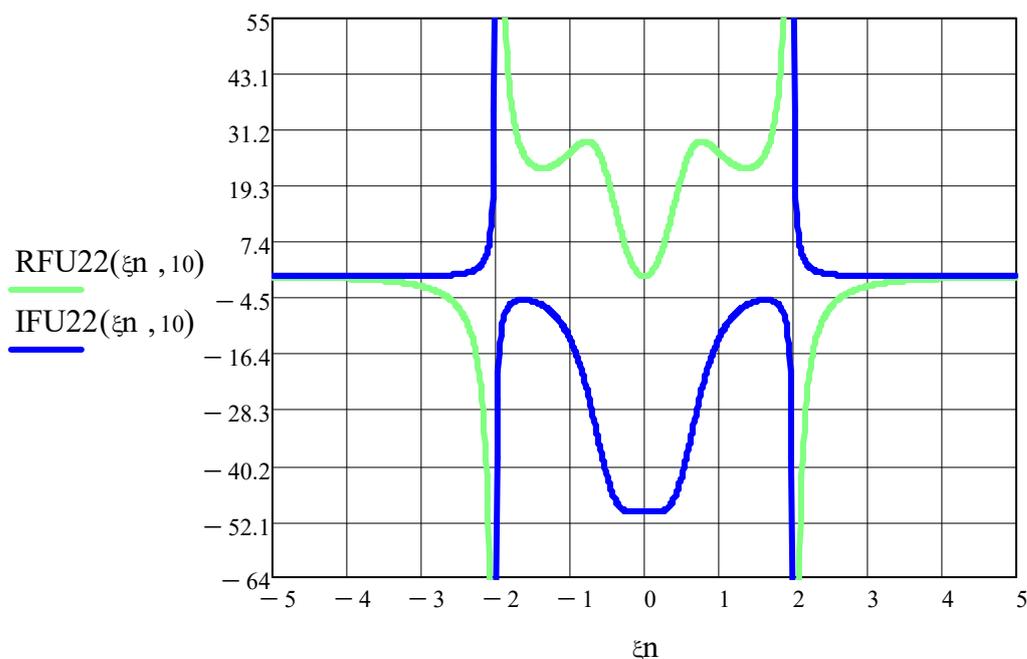


Рисунок 1.4- Изменение  $\text{Re}\bar{U}_2^2(\xi, \omega)$  и  $\text{Im}\bar{U}_1^1(\xi, \omega)$

при фиксированном  $\omega$ :  $\omega = 1$

На рисунках 1.1-1.2 изображена трансформанта Фурье перемещений и температура стержня при действии импульсной сосредоточенной силы. А на рисунках 1.3-1.4 изображена трансформанта Фурье перемещений и температура стержня при действии импульсного сосредоточенного теплового источника при малой частоте. Для анализа влияния  $\omega$  на поведения трансформанты проводились расчеты для разных частот. Здесь на рисунках 1.5-1.8 представлены аналогичные графики при  $\omega=10$ .

Скачки на графиках связаны с сингулярностью трансформанты на действительной оси, связанной с наличием нулей в знаменателе трансформанты Фурье (см. (1.13)). Это объясняет наличие вертикальных асимптот при определенных значениях  $\xi$ .

При  $\xi \rightarrow \infty$  трансформанты Фурье перемещений и напряжений стремятся к нулю.

Симметричность графиков связана со свойствами симметрии трансформанты Фурье тензора Грина.

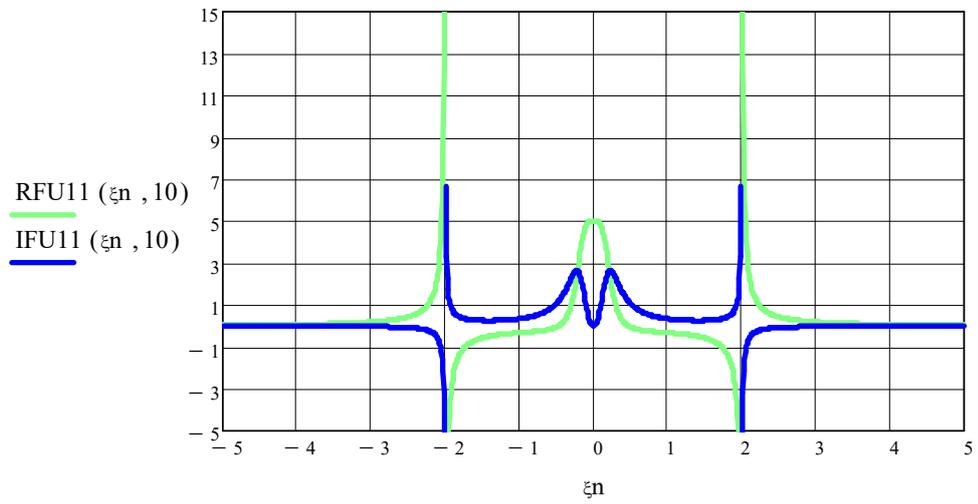


Рисунок 1.5 - Изменение  $\text{Re}\bar{U}_1^1(\xi, \omega)$  и  $\text{Im}\bar{U}_1^1(\xi, \omega)$   
при фиксированном  $\omega$ :  $\omega = 10$

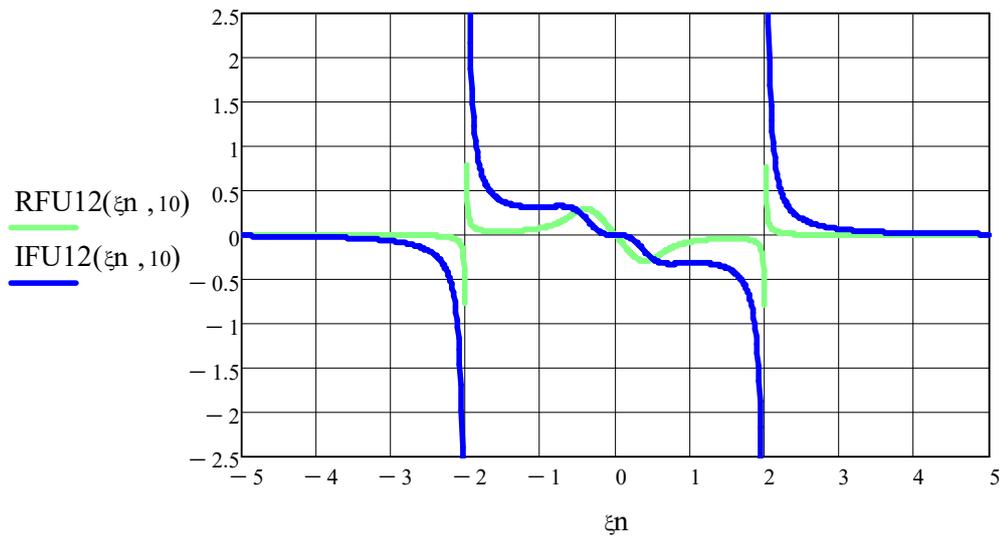


Рисунок 1.6 - Изменение  $\text{Re}\bar{U}_1^2(\xi, \omega)$  и  $\text{Im}\bar{U}_1^2(\xi, \omega)$   
при фиксированном  $\omega$ :  $\omega = 1$

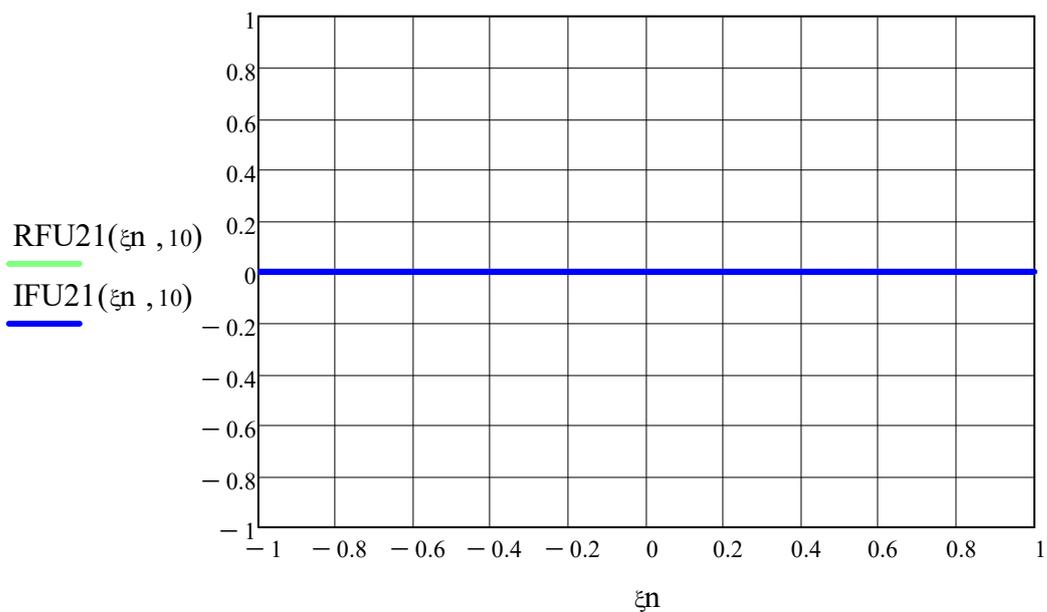


Рисунок 1.7 - Изменение  $\text{Re}\bar{U}_2^1(\xi, \omega)$  и  $\text{Im}\bar{U}_2^1(\xi, \omega)$

при фиксированном  $\omega$ :  $\omega = 1$

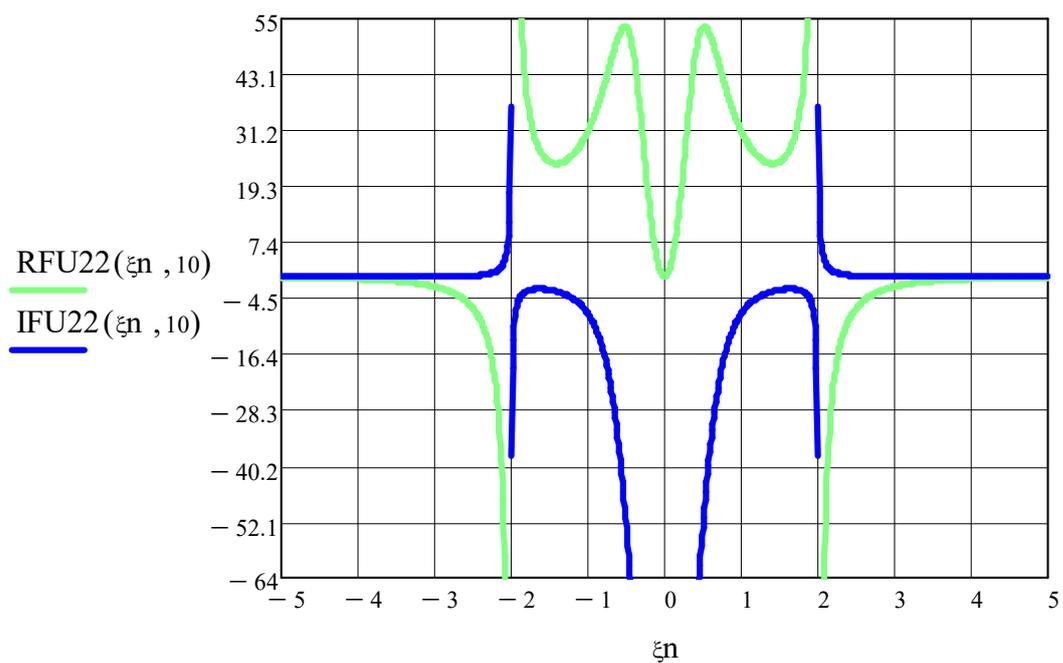


Рисунок 1.8 - Изменение  $\text{Re}\bar{U}_2^2(\xi, \omega)$  и  $\text{Im}\bar{U}_1^1(\xi, \omega)$

при фиксированном  $\omega$ :  $\omega = 10$

## Расчет вспомогательных функций

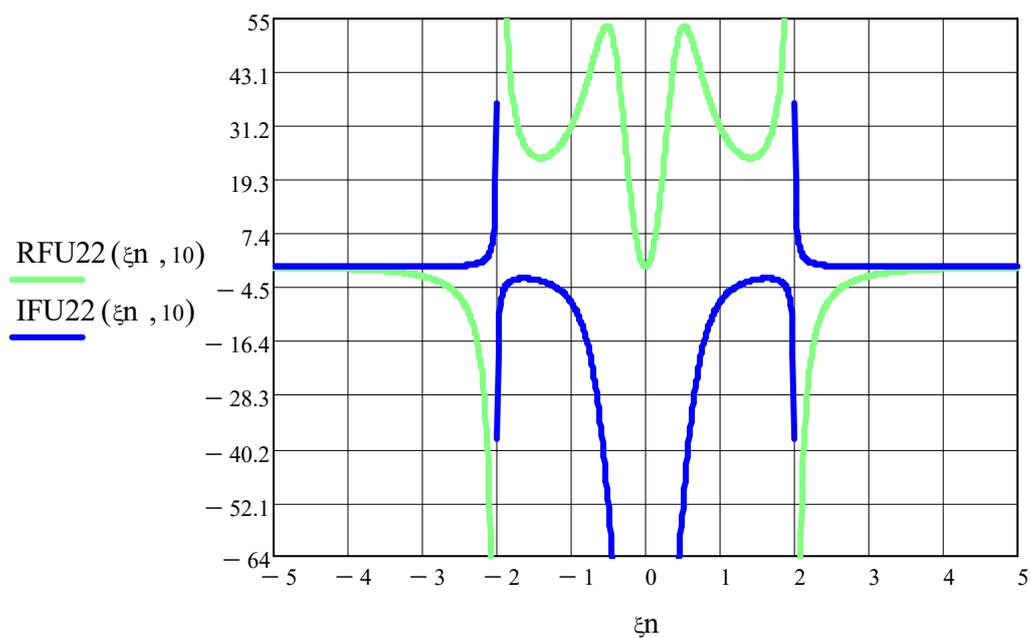
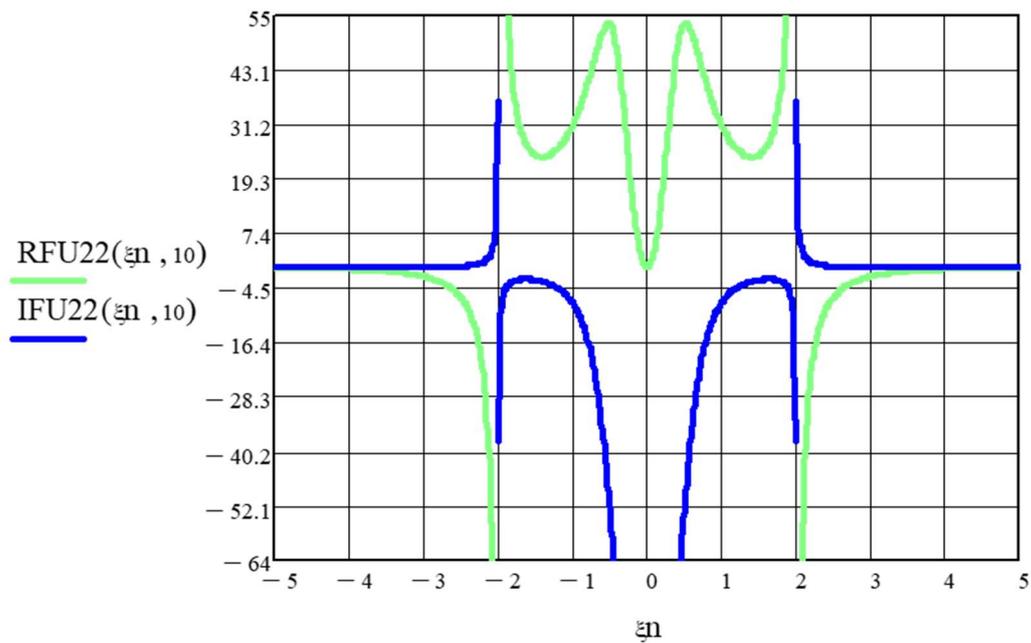
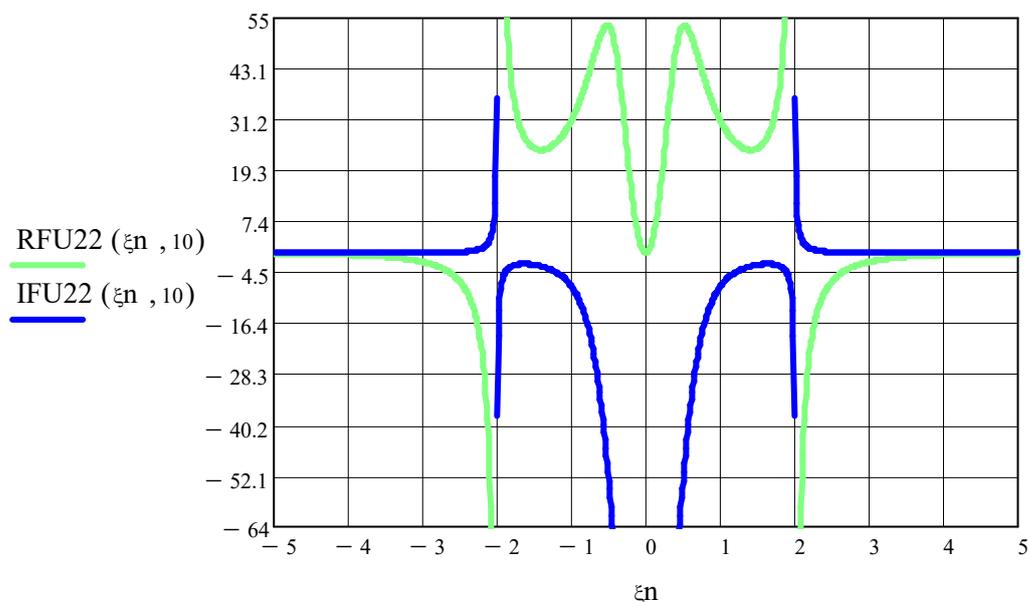


Рисунок 1.9 - Первая производная  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial x}$

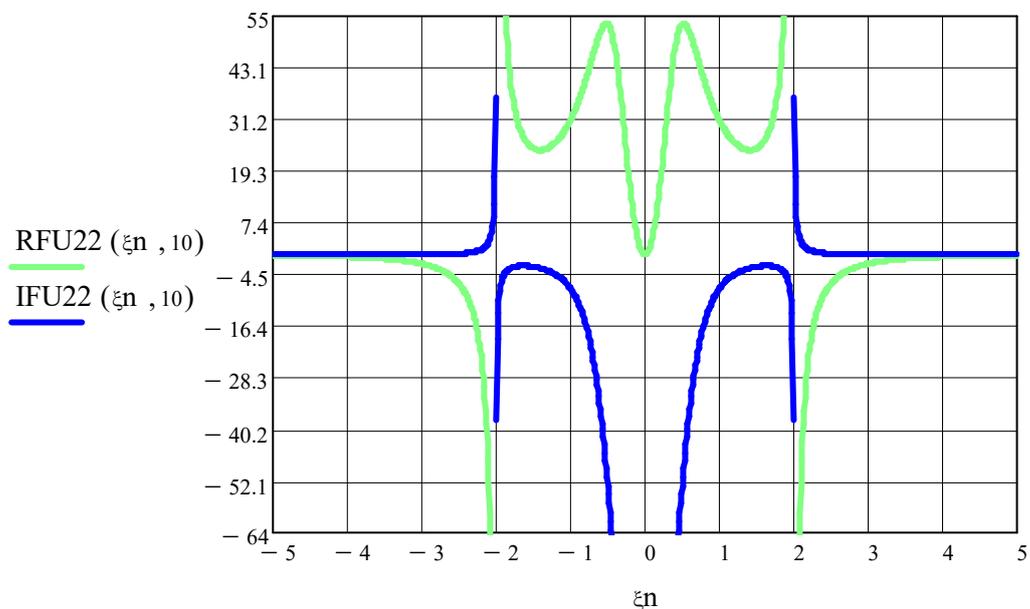
Для построения тензора Грина были запрограммированы вспомогательные функции, их первые и вторые производные, представленные в первом разделе.

На рисунках 1.9-1.15 представлены расчеты этих функций при следующих термоупругих параметрах:

Расчеты проведенных в фиксированных точках  $x_n$ , указанных в первом аргументе расчетных функций в различные моменты времени  $t_n$ , в пределах, указанных на оси абсциссы.



а



б

Рисунок 1.10 (а,б) - Первая производная  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial t}$

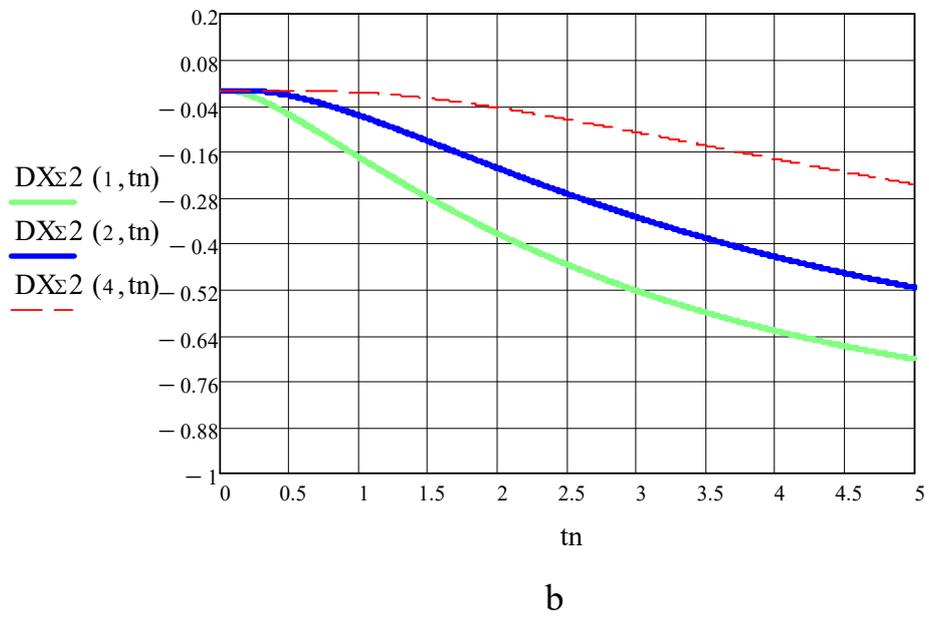
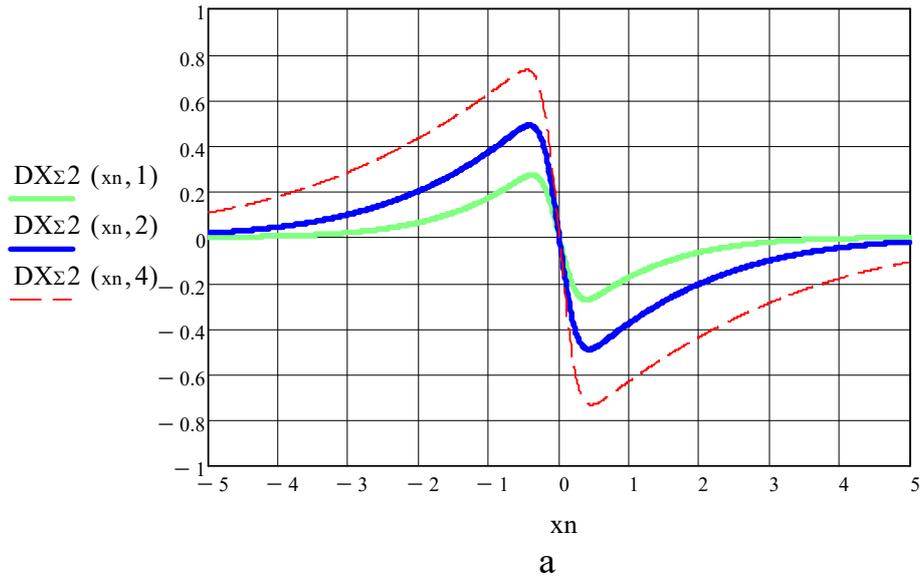
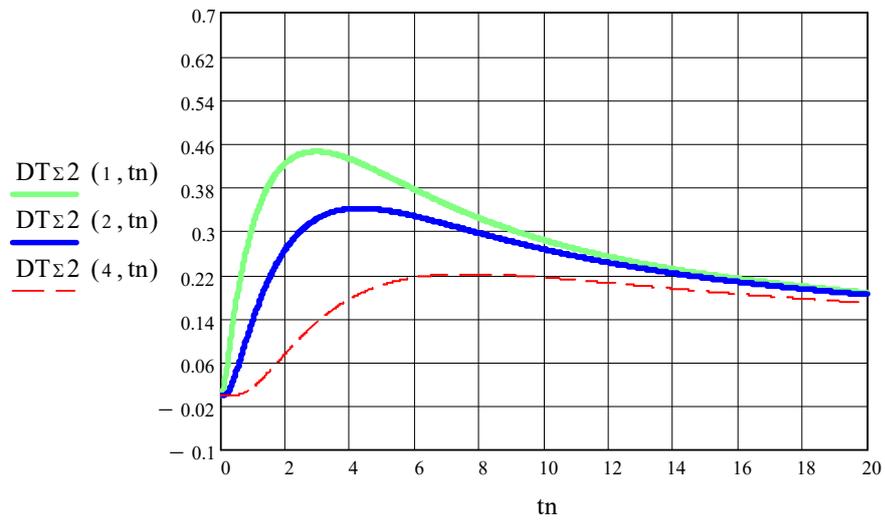
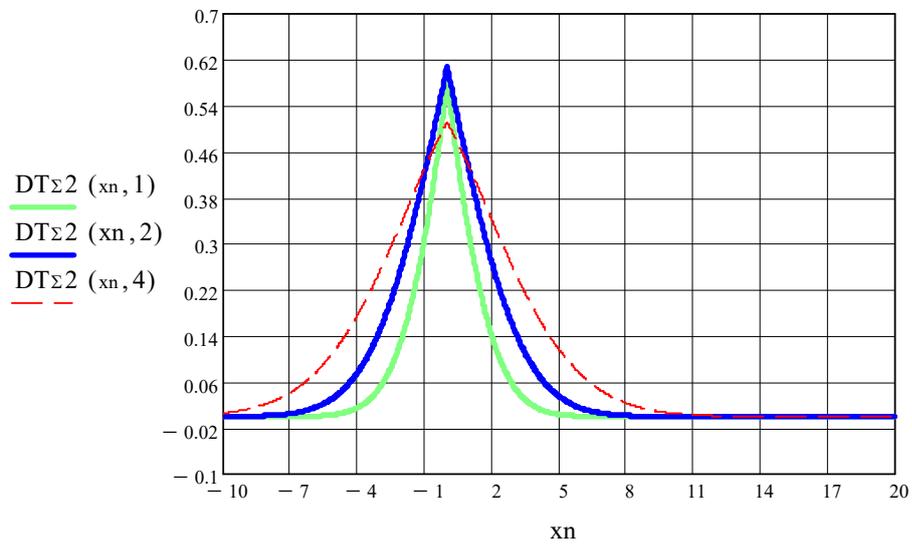


Рисунок 1.11 (а, б) - Первая производная  $\frac{\partial \Sigma_2}{\partial x}$

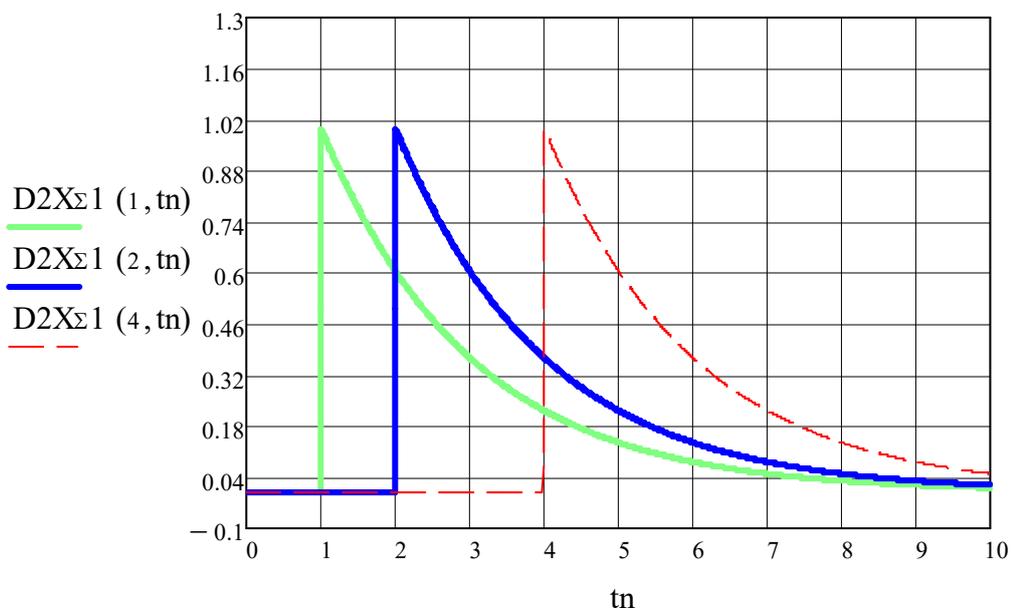


а

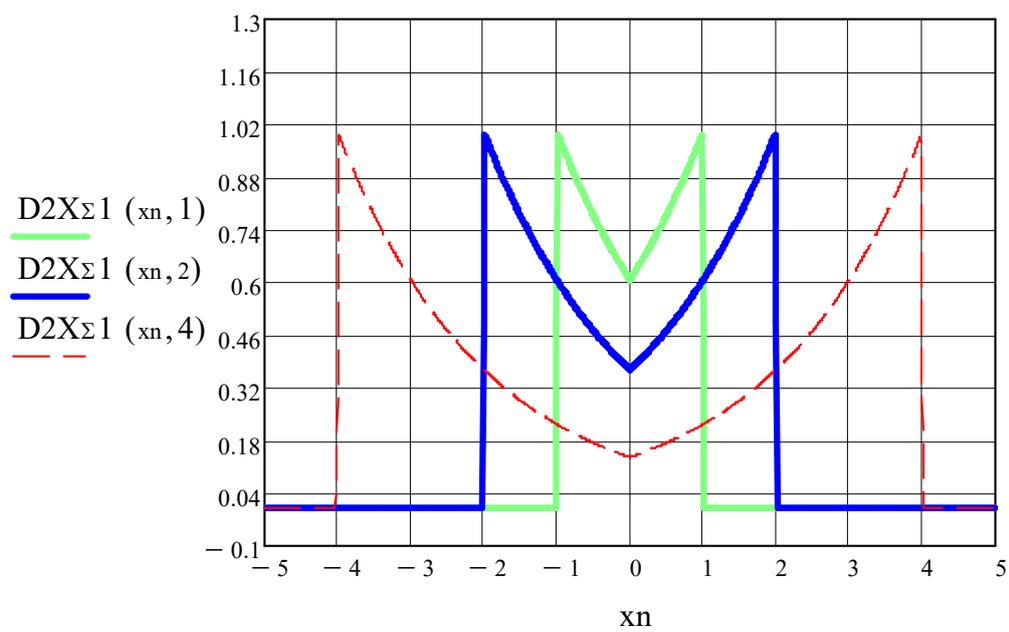


б

Рисунок 1.12 (а,б) - вторая производная  $\frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2}$

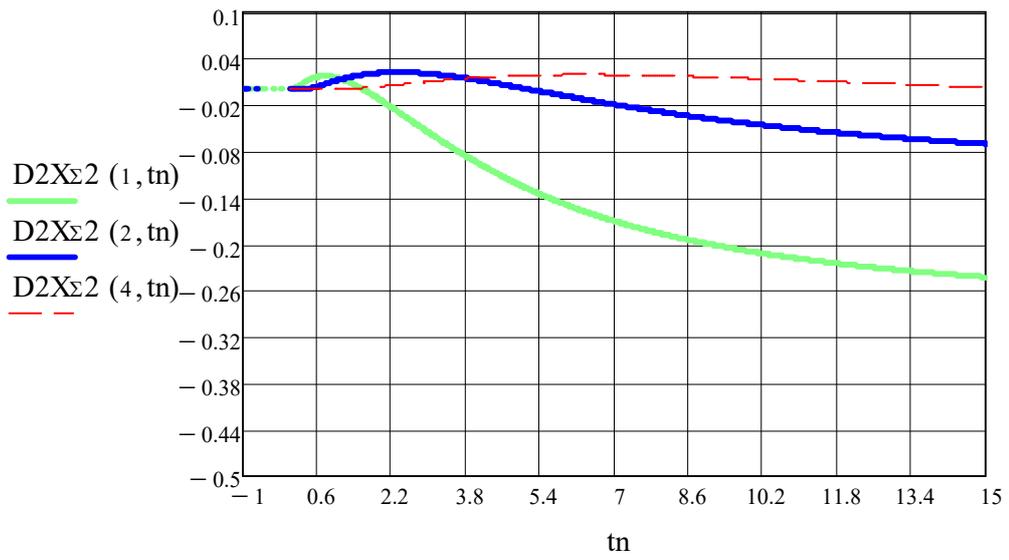


а

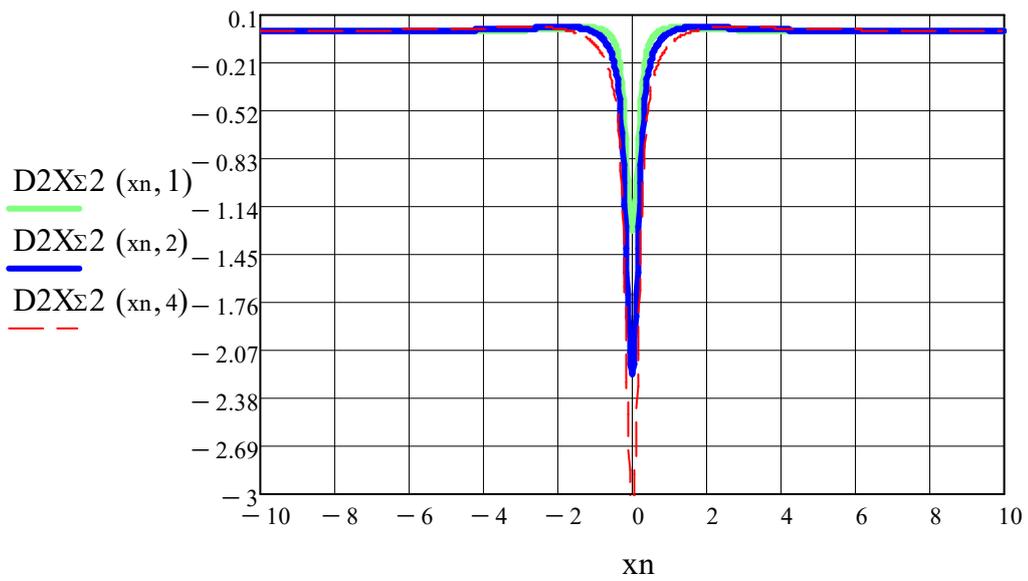


б

Рисунок 1.13 (а,б) - вторая производная  $\frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2}$

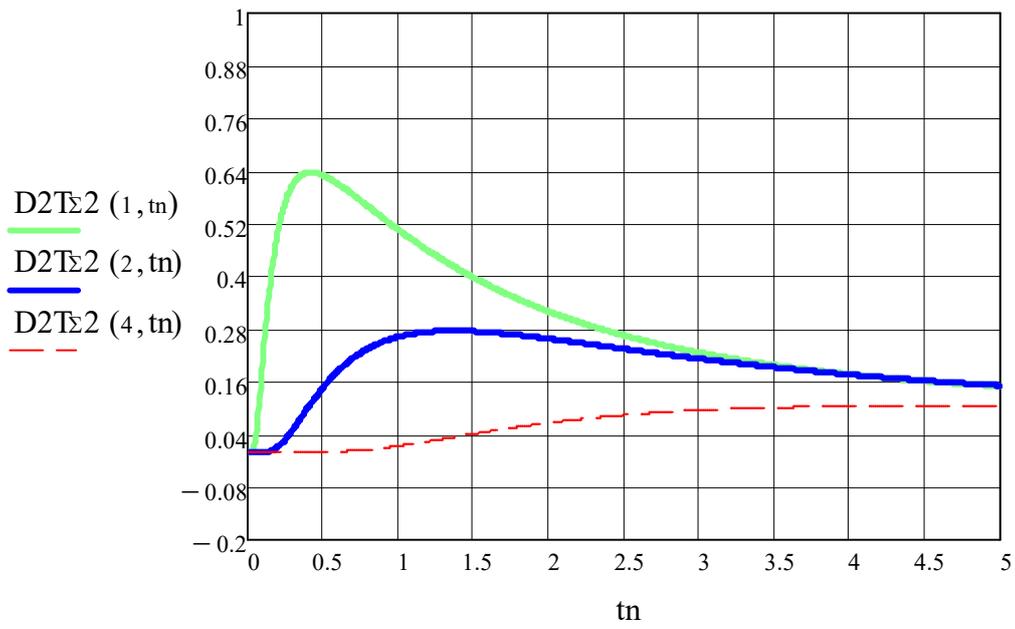


а

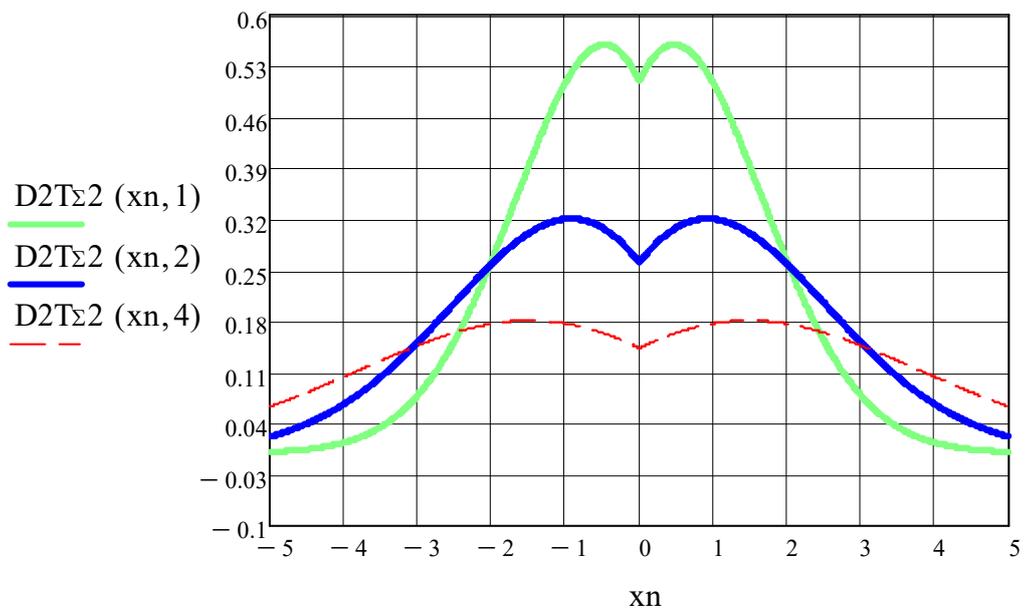


б

Рисунок 1.14 (а,б) - вторая производная  $\frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2}$



a



б

Рисунок 1.15 (а,б) - вторая производная  $\frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2}$

### 1.4.1 Численные расчеты тензора Грина. Ударные волны

В системе MatCad-15 разработана программа расчета тензора Грина  $U_i^j(x,t)$ . Проведены расчеты компонент этой матрицы для разных термоупругих параметров в различных точках среды.

На рисунках 1.16-1.22 показано изменение со временем соответствующей компоненты тензора Грина в фиксированной точке среды.

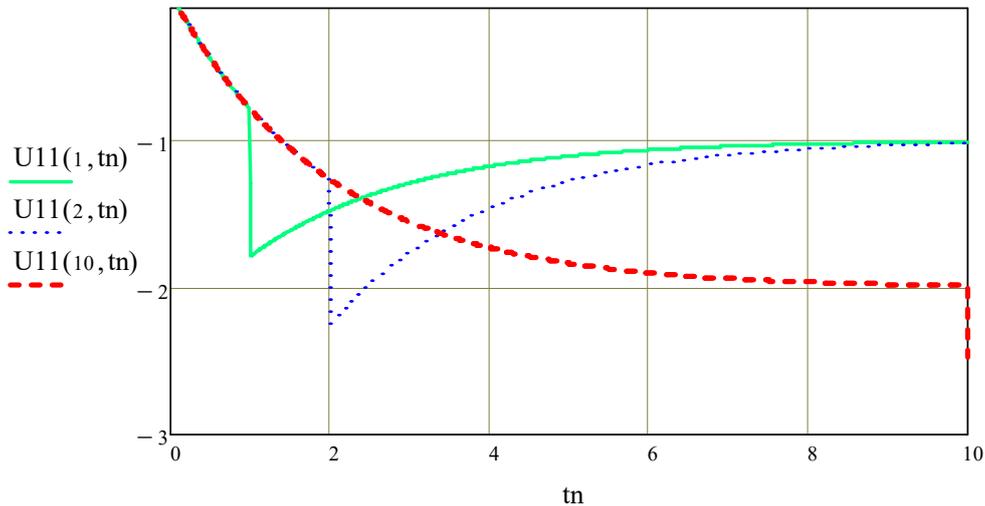


Рисунок 1.16 - Изменение со временем  $U_1^1(x,t)$

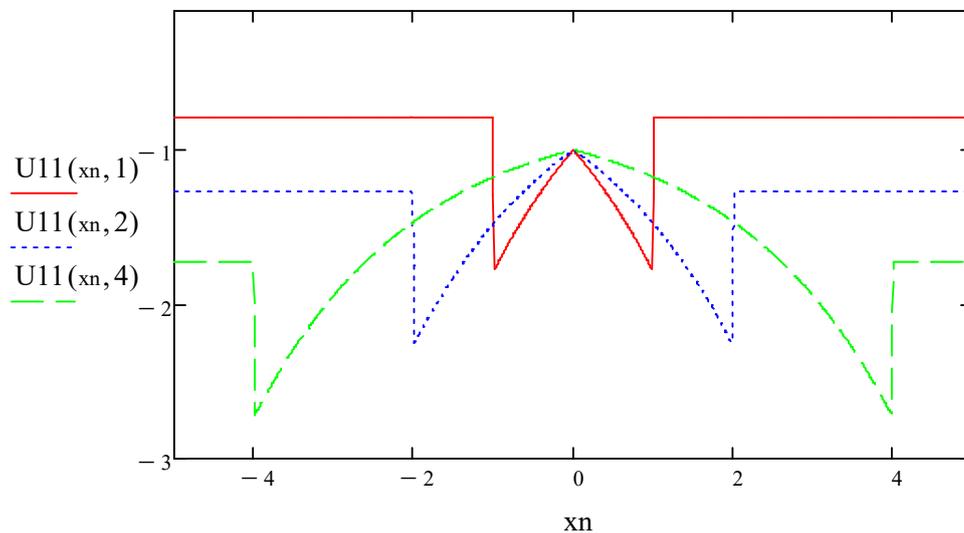


Рисунок 1.17 - Изменение по координате  $U_1^1(x,t)$  при фиксированном  $t$

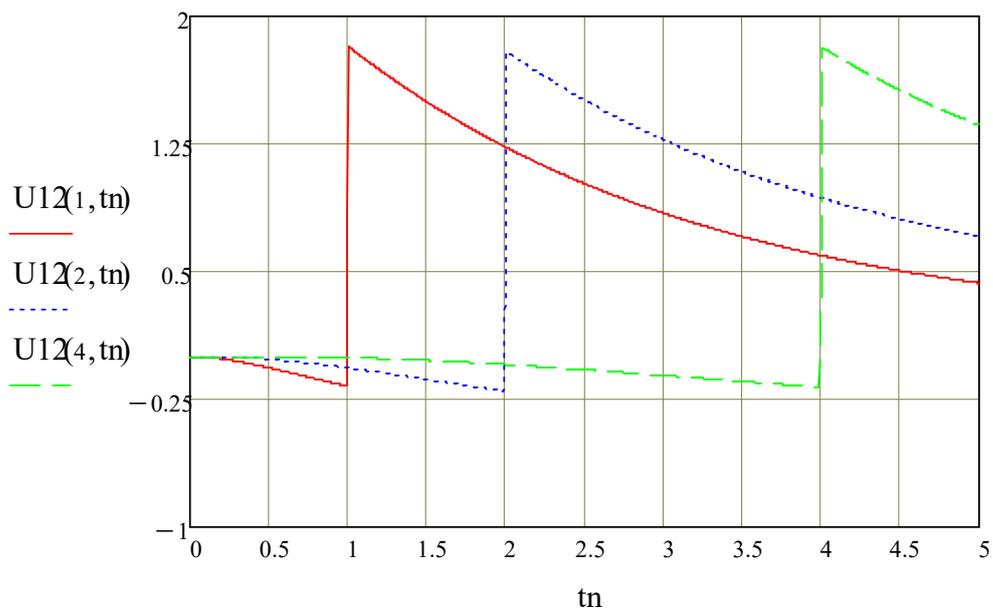


Рисунок 1.18 - Изменение со временем  $U_1^2(x, t)$

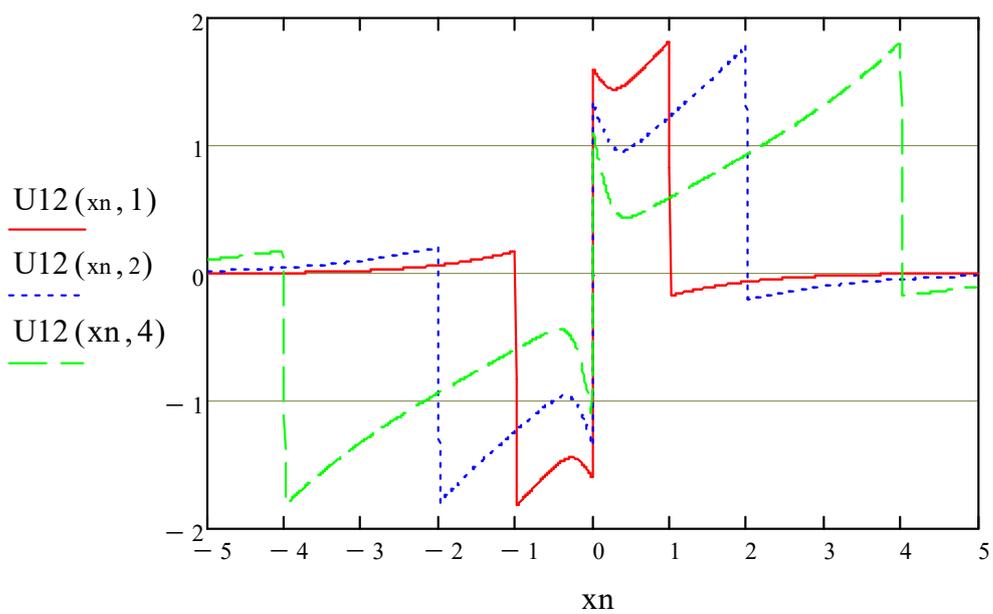


Рисунок 1.19 - Изменение по координате  $U_1^2(x, t)$  при фиксированном  $t$

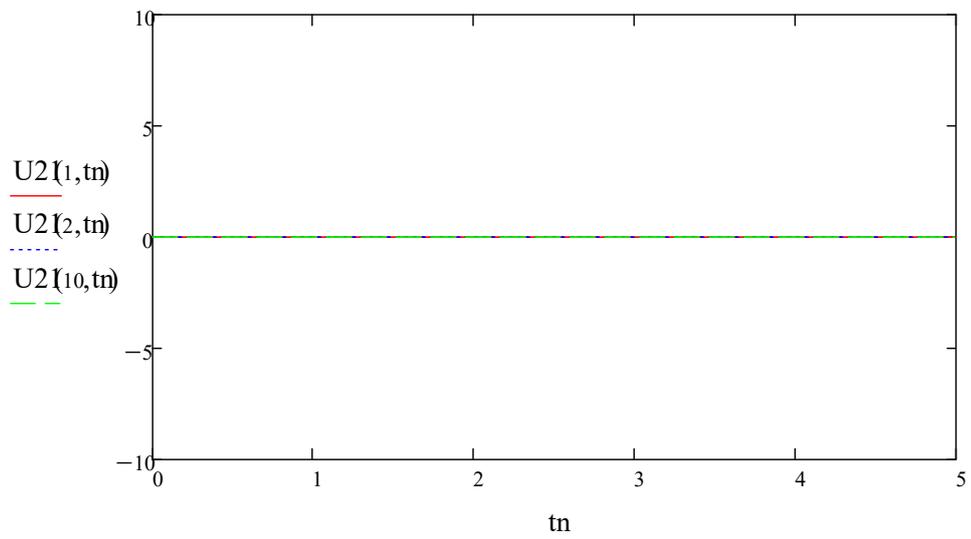


Рисунок 1.20 - Изменение со временем  $U_2^1(x,t)$

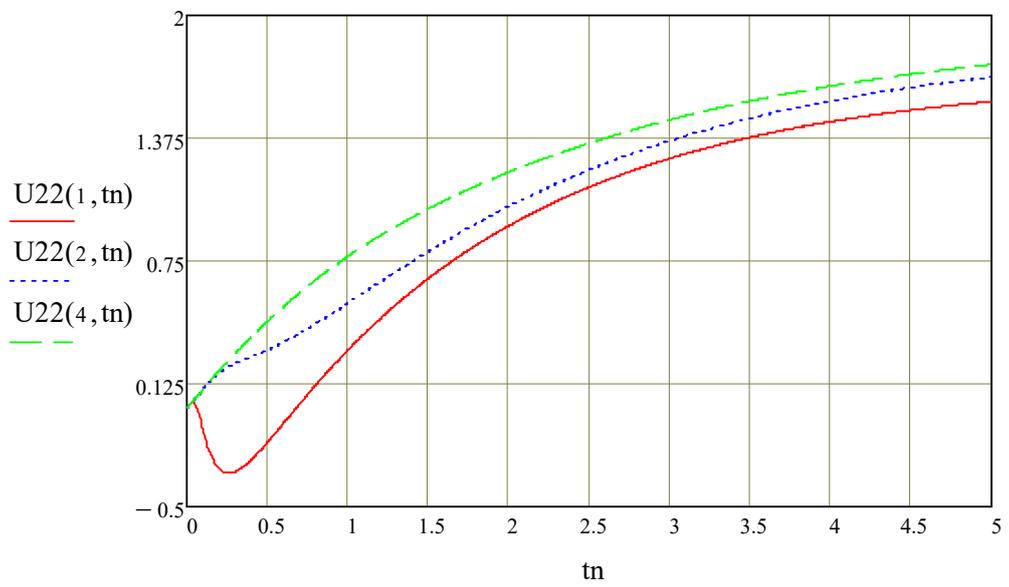


Рисунок 1.21 - Изменение со временем  $U_2^2(x,t)$

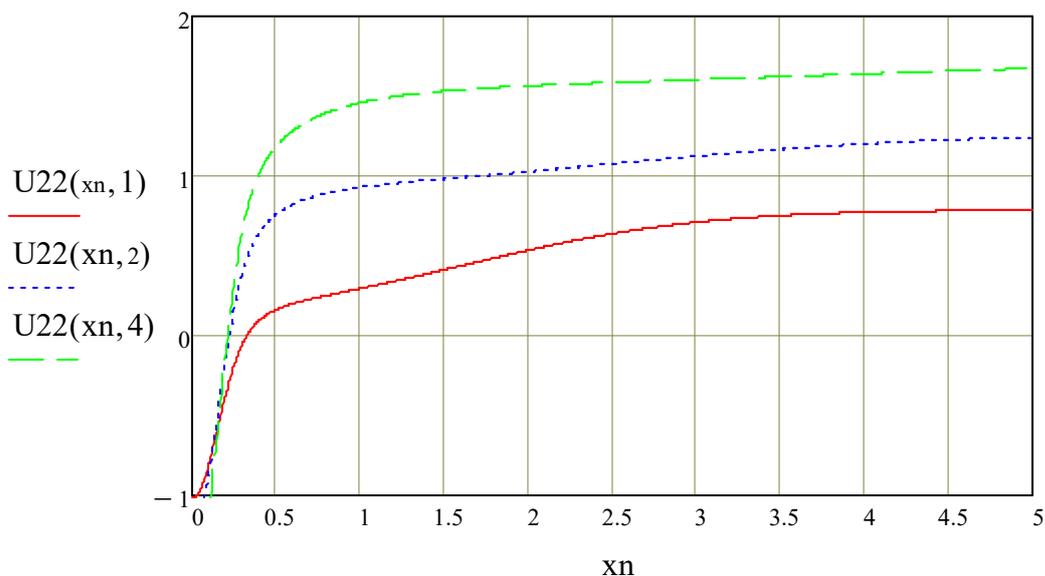


Рисунок 1.22 - Изменение по координате  $U_2^2(x, t)$  при фиксированном  $t$

Здесь скачки перемещений на графиках функции связаны с моментом прихода упругой ударной волны в точку  $x_n$  в момент времени  $t=xn/c$ .

Расчеты здесь проведены при следующих условных термоупругих параметрах:  $\rho=1$ ,  $c=1$ ,  $\gamma=1$ ,  $k=2$ . Программа позволяет проводить варьировать параметры задачи, что проводилось при численных экспериментах.

### 1.4.2 Вычисление перемещений, температуры и напряжений в стержне

В качестве примера распределенных источников были рассмотрены три задачи.

*Задача 1.* Рассмотрим действие импульсной силы, равномерно распределенной на отрезке  $(-L, L)$ :

$$F_1(x, t) = aH(L - |x|)\delta(t), \quad F_2(x, t) = 0$$

Перемещение стержня и температура стержня, согласно (1.7), примут вид:

$$u(x,t) = U_1^1(x,t) * F_1(x,t) =$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} U_1^1(x-y,t) H(l-|y|) dy = a \int_{-L}^L U_1^1(x-y,t) dy$$

$$\theta(x,t) = U_2^1(x,t) * F_1(x,t) =$$

$$a \int_{-\infty}^{\infty} U_2^1(x-y,t) H(l-|y|) dy = a \int_{-L}^L U_2^1(x-y,t) dy$$

Для вычисления напряжений используем закон Дюамеля-Неймана (1.2):

$$\sigma(x,t) = (U_1^1 * F_1)_{,x} - U_2^1(x,t) * F_1 = \rho c^2 U_1^1 * F_{1,x} - \gamma U_2^1 * F_1$$

*Задача 2.* Рассмотрим действие мгновенного теплового источника, равномерно распределенного на отрезке  $(-L, L)$ :

$$F_1(x,t) = 0, \quad F_2(x,t) = bH(L-|x|)\delta(t)$$

Перемещение стержня и температура стержня, согласно (1.7), примут вид:

$$u(x,t) = U_1^2(x,t) * F_2(x,t) = b \int_{-\infty}^{\infty} U_1^2(x-y,t) H(l-|y|) dy = a \int_{-L}^L U_1^2(x-y,t) dy,$$

$$\theta(x,t) = U_2^2(x,t) * F_2(x,t) = b \int_{-\infty}^{\infty} U_2^2(x-y,t) H(l-|y|) dy = a \int_{-L}^L U_2^2(x-y,t) dy.$$

$$\sigma(x,t) = (U_1^2 * F_2)_{,x} - U_2^2(x,t) * F_2 = \rho c^2 U_1^2 * F_{2,x} - \gamma U_2^2 * F_2$$

Вычисляя, получим

$$\sigma(x,t) = \frac{\rho c^2 \gamma A}{2} H(t) \times$$

$$\left( e^{\frac{-c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{-c^2}{k}t - \frac{x^2}{4k\tau}} \left( \frac{x^2}{2k\tau} - 1 \right)}{\tau \sqrt{\tau}} d\tau - \int_0^t \frac{e^{\frac{-c^2}{k}t - \frac{x^2}{4k\tau}} \left( \frac{x^2}{2k\tau} - 1 \right)}{\tau \sqrt{\tau}} d\tau + H(ct - |x|) \frac{e^{\frac{c(|x|-ct)}{k}}}{c} \right)$$

*Задача 3.* Рассмотрим действие импульсного теплового источника, равномерно распределенного на отрезке  $(-L, L)$  вида

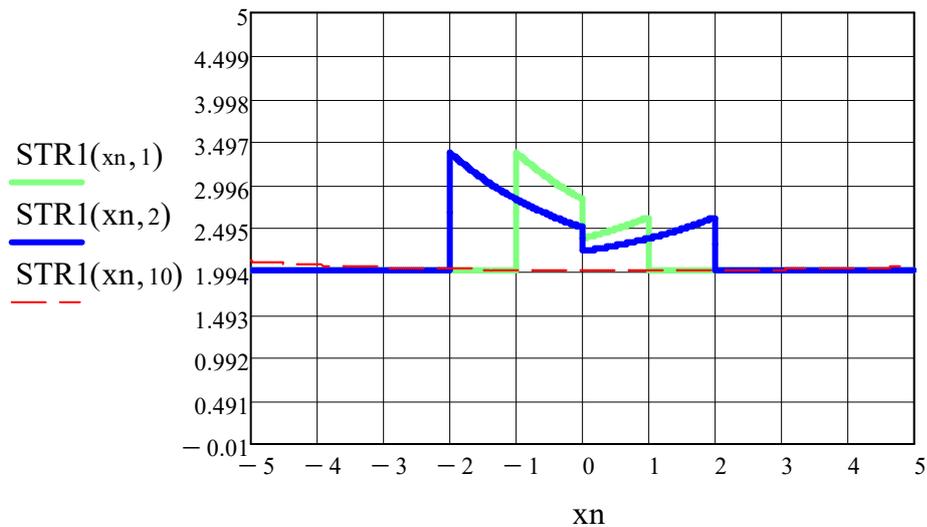
$$F_2(x,t) = f(t)H(t)H(T-t)H(L-|x|), \quad F_1(x,t) = 0$$

Перемещение стержня и температура стержня, согласно (1.7), примут вид:

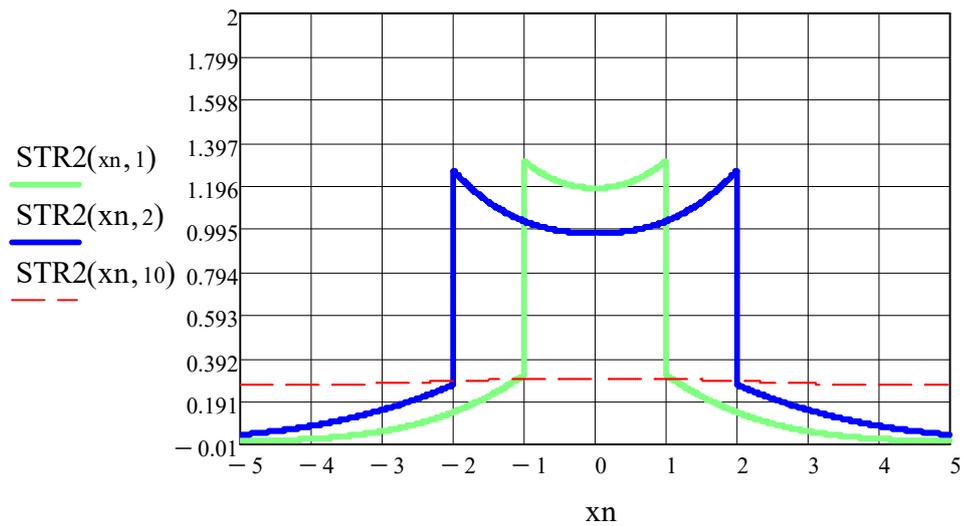
$$\begin{aligned} u(x,t) &= U_1^2 * F_2 = d \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)H(t-\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} U_1^2(x-y,t)H(l-|y|)dy = \\ &= H(t) \int_0^t f(t-\tau)d\tau \int_{-L}^L U_1^2(x-y,t)dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= U_1^2 * F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)H(t-\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} U_2^2(x-y,t)H(l-|y|)dy = \\ &= H(t) \int_0^t f(t-\tau)d\tau \int_{-L}^L U_2^2(x-y,t)dy \end{aligned}$$

Разработаны программы расчета решений всех трех задач в системе Matcad-15. Здесь на рисунках 1.23 представлены соответствующие графики перемещений, температур и напряжений.

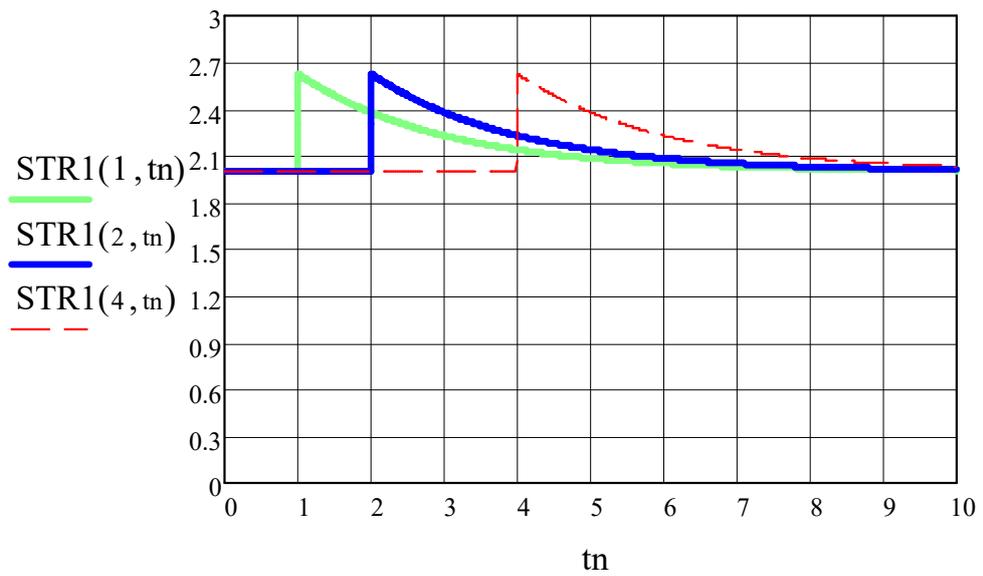


a



б

Рисунок 1.23 (а,б) - Напряжения в стержне при действии импульсного равномерно распределенного силового источника



а

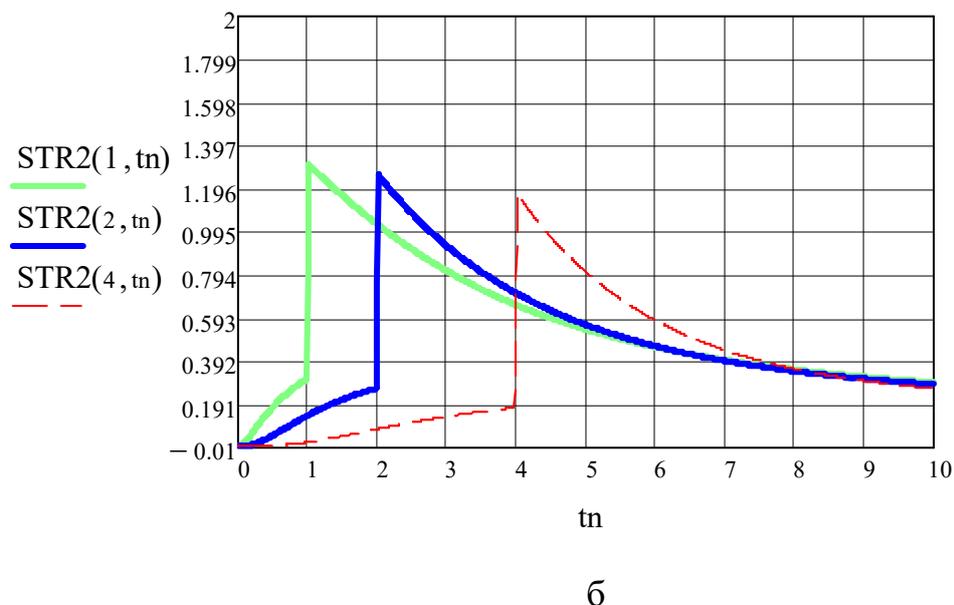


Рисунок 1.24 (а, б)- Напряжения в стержне при действии импульсного равномерно распределенного теплового источника

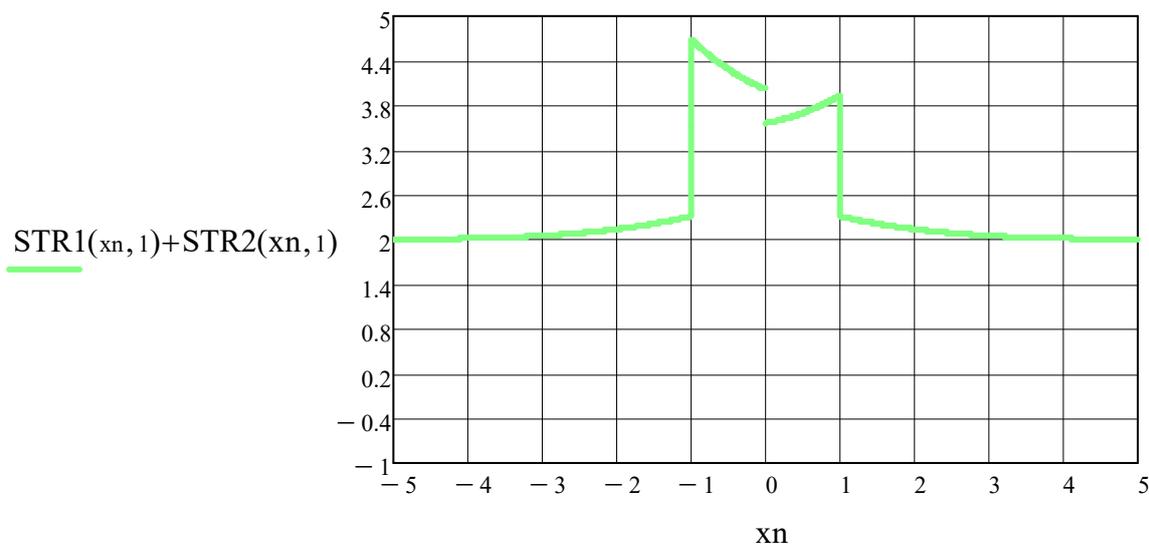


Рисунок 1.25 – термоупругие напряжения в стержне при совместном действии равномерно распределенных на отрезке силовых и тепловых источников

### 1.5 Задача Коши для уравнений термоупругости и ее решение

Знание тензора Грина позволяет строить решения широкого класса задач динамики термоупругих стержней. Здесь рассмотрим задачу Коши, решение которой позволяет определить состояние стержня в любой момент времени, если

известно его начальное состояние и действующие силовые и тепловые источники. Для решения задачи используем метод Владимира В.С., разработанный им для решения задачи Коши для волновых уравнений.

### 1.5.1 Постановка задачи Коши для уравнений несвязанной термоупругости

Начальные условия известны:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_{,t}(x,0) = v_0(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x). \quad (1.26)$$

Действующие силовые и тепловые источники описываются обобщёнными функциями медленного роста.

Требуется найти обобщенные решения уравнений (1.1) с начальными условиями (1.26), которые удовлетворяют условиям излучения:

$$u(x,t) \rightarrow 0, \quad \theta(x,t) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad \forall t \quad (1.27)$$

### 1.5.2 Постановка задачи Коши в пространстве обобщенных функций. Метод Владимира В.С.

Вводятся регулярные обобщенные функции

$$\hat{u}(x,t) = u(x,t)H(t) \quad \hat{\theta}(x,t) = \theta(x,t)H(t), \quad \hat{f}(x,t) = f(x,t)H(t)$$

Рассматривается действие термоупругого оператора на пространстве функций медленного роста. Т.к.

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} H(t), \quad \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} H(t),$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} H(t) + u_0(x)\delta(t), \quad \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} H(t) + v_0(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t).$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} H(t), \quad \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} H(t),$$

уравнения движения в пространстве обобщенных функций примут вид

$$\begin{aligned} & c^2 \hat{u}_{,xx} - \hat{u}_{,tt} - \frac{\gamma}{\rho} \hat{\theta}_{,x} = \\ & = (c^2 u_{,xx} - u_{,tt} - \frac{\gamma}{\rho} \theta_{,x}) H(t) - V_0(x)\delta(t) - u_0(x)\delta'(t) = \\ & = -\hat{F}_1(x,t) - V_0(x)\delta(t) - u_0(x)\delta'(t) = -\hat{F}_{\Delta 1}(x,t) \end{aligned}$$

(1.28)

$$\frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial x^2} - k^{-1} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} = \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - k^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) H(t) + k^{-1} \theta_0(x) \delta(t) = -\hat{F}_{\Delta 2}(x, t)$$

Как видим, в эти уравнения начальные условия входят в массовые силы и тепловые источники:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\Delta 1}(x, t) &= F_1(x, t)H(t) + V_0(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t), \\ \hat{F}_{\Delta 2}(x, t) &= F_2(x, t)H(t) + k^{-1}\theta_0(x)\delta(t). \end{aligned} \quad (1.29)$$

как мгновенно действующие.

Решение этой задачи в пространстве обобщенных функций имеет вид тензорно-функциональной свертки (1.7)

$$\begin{aligned} u(x, t)H(t) &= U_1^k(x, t) * F_{\Delta k}(x, t), \quad k=1, 2, \\ \theta(x, t)H(t) &= U_2^k(x, t) * F_{\Delta k}(x, t), \quad k=1, 2. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Как известно, это решение единственно в алгебре сверток, допустимых с тензором Грина.

### 1.5.3 Интегральное представление решения задачи Коши

Чтобы получить интегральное представление обобщенного решения, вычислим свертки в (1.30):

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \hat{U}_1^k * \hat{F}_k(x, t) + \\ &+ \hat{U}_1^1 * (V_0(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t)) + U_1^2 * \theta_0(x)\delta(t) = \\ &= H(t) \int_0^t d\tau \int_{R^1} U_1^k(x-y, t-\tau) F_k(y, \tau) dy + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} U_1^1(x-y, t) V_0(y) dy + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} U_1^1(x-y, t) u_0(y) dy + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} U_1^2(x-y, t) \theta_0(y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(x,t) &= U_2^k(x,t) * \hat{F}_k(x,t) + \\
&+ U_2^1 * (V_0(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t)) + U_2^2 * \theta_0(x)\delta(t) = \\
&= H(t) \int_0^t d\tau \int_{R^1} U_2^k(x-y, t-\tau) F_k(y, \tau) dy + \\
&+ H(t) \int_{-\infty}^{\infty} U_2^k(x-y, t-\tau) V_0(x-y) dy + H(t) \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} U_2^1(x-y, t-\tau) u_0(x-y) dy + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} U_2^2(x-y, t-\tau) \theta_0(x-y) dy
\end{aligned}$$

Итак, доказана теорема.

**Теорема 1.1.** Если  $F_1(x,t), F_2(x,t)$  локально-интегрируемые на  $R^2$  функции, а  $u_0(x), V_0(x), \theta_0(x)$  непрерывны на  $R$ , то решение задачи Коши для уравнений несвязанной термоупругости имеет вид:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= H(t) \int_0^t d\tau \int_{R^1} U_1^k(x-y, t-\tau) F_k(y, \tau) dy + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} U_1^1(x-y, t) V_0(y) dy + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} U_1^1(x-y, t) u_0(y) dy + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} U_1^2(x-y, t-\tau) \theta_0(x-y) dy, \\
\theta(x,t) &= H(t) \int_0^t d\tau \int_{R^1} U_2^k(x-y, t-\tau) F_k(y, \tau) dy + \\
&+ H(t) \int_{-\infty}^{\infty} U_2^k(x-y, t-\tau) V_0(x-y) dy + H(t) \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} U_2^1(x-y, t-\tau) u_0(x-y) dy + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} U_2^2(x-y, t-\tau) \theta_0(x-y) dy.
\end{aligned}$$

где  $t > 0$ .

Заметим, что эти формулы можно использовать и при действии сингулярных источников  $\hat{F}_1(x,t), \hat{F}_2(x,t)$  только в этом случае свертки надо брать по правилам сверток в пространстве обобщенных функций.

## ВЫВОДЫ

1. Разработан метод построения фундаментальных и обобщенных решений уравнений термоупругости в пространственно-одномерном случае при действии массовых сил и тепловых источников из класса обобщенных функций медленного роста.
2. Построено обобщенное преобразование Фурье матрицы фундаментальных решений уравнений несвязанной термоупругости и проведена его регуляризация для восстановления оригинала тензора Грина.
3. Построен тензор Грина уравнений несвязанной термоупругости, описывающий термодинамику среды при действии мгновенных сосредоточенных силовых и тепловых источников.
4. Построены обобщенные решения уравнений несвязанной термоупругости и даны их регулярные интегральные представления.
5. С использованием метода Владимирова В.С. построено решение задачи Коши для уравнений несвязанной термоупругости в пространстве обобщенных функций медленного роста.
6. Построены аналитические формулы для определений перемещений, напряжений, деформации и температуры стержня с учетом его термоупругих параметров.
7. Проведена компьютерная реализация тензора Грина и ряда построенных решений уравнений термоупругости при действии распределенных на отрезке в системе Matcad 15 и проведены компьютерные эксперименты для среды с безразмерными термоупругими параметрами.

Результаты работы, представленной в данном разделе, были опубликованы в двух статьях [1,6] (см. Публикации, стр 14) и представлены на конференциях [1,2,6] (см. Тезисы докладов, стр 15).

## 2 КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ И ИХ РЕШЕНИЯ. МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИИ

В данном разделе рассматриваются пространственно-одномерные краевые задачи термодинамики стержня конечной длины с использованием модели несвязанной термоупругости, которые можно использовать для исследования различных стержневых конструкции в условиях теплового нагрева. Здесь предлагается единая методика решения различных краевых задач, типичных для практических приложений. Рассматриваются задачи определения термонапряженного состояния термоупругого стержня при различных краевых условиях на его концах и действующих силовых и тепловых источников по всей длине стержня. На основе метода обобщенных функций построены обобщенные решения нестационарных и стационарных краевых задач при действии силовых и тепловых источников различного типа, в том числе стационарных источников периодических колебаний. Действующие источники могут быть заданы и сингулярными обобщенными функциями, при различных краевых условиях на концах стержня. Рассмотрены ударные упругие волны, которые возникают в таких конструкциях при действии ударных нагрузок. Получены регулярные интегральные представления обобщенных решений, которые дают аналитическое решение поставленных краевых задач. Особенность построенных решений делает их удобными для исследования сетевых термоупругих систем, которые можно моделировать термоупругими графами.

### 2.1 Постановка нестационарных краевых задач термоупругости

Рассматривается термоупругий стержень длины  $2L$ , который характеризуется плотностью  $\rho$ , скоростью упругих волн  $c$  и термоупругими константами  $\gamma$  и  $\kappa$ . Перемещения сечений стержня и температурное поле стержня описывается системой гиперболо-параболических уравнений вида [4,5]:

$$\rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma \theta_{,x} + \rho F_1 = 0, \quad (2.1)$$

$$\theta_{,xx} - \kappa^{-1} \theta_{,t} + F_2 = 0. \quad (2.2)$$

Здесь  $u(x,t)$  - компоненты продольных смещений,  $\theta(x,t)$  - относительная температура,  $F_1$  - плотность действующей силы на единицу длины,  $c$  - скорость распространения термоупругих волн в стержне. Предполагается, что функции  $F_1(x,t)$ ,  $F_2(x,t)$  принадлежат классу обобщенных функций медленного роста, что позволяет моделировать термодинамические процессы в стержнях при действии сосредоточенных как силовых так и тепловых источников различного типа.

Термоупругое напряжение в стержне определяется соотношением Дюамеля-Неймана:

$$\sigma(x,t) = \rho c^2 u_{,x}(x,t) - \gamma \theta(x,t) \quad (2.3)$$

Рассмотрим ряд прямых, характерных для инженерной практики, краевых задач термоупругости, решения которых удовлетворяют следующим начальным и краевым условиям.

*Начальные условия* (условия Коши): при  $t=0$  смещения, скорости и температура известны:

$$u(x,0) = u_0(x), \theta(x,0) = \theta_0(x), |x| \leq L, \partial_t u(x,0) = \dot{u}_0(x), |x| < L. \quad (2.4)$$

На концах стержня ( $x = x_1 = -L, x = x_2 = L$ ) заданы *краевые условия*, которые различны в зависимости от рассматриваемых краевых задач. Здесь построим решения следующих краевых задач.

*Краевая задача 1.* Известны перемещения концов стержня и температура на них:

$$u(x_j, t) = w_j(t), \quad \theta(x_j, t) = \theta_j(t), \quad j = 1, 2. \quad (2.5)$$

*Краевая задача 2.* Известны напряжения на концах стержня и тепловые потоки на них:

$$\sigma(x_j, t) = p_j(t), \quad \theta_{,x}(x_j, t) = q_j(t), \quad j = 1, 2. \quad (2.6)$$

*Краевая задача 3.* Известны перемещения концов стержня и тепловые потоки на них:

$$u(x_j, t) = w_j(t), \quad \theta_{,x}(x_j, t) = q_j(t), \quad j = 1, 2. \quad (2.7)$$

*Краевая задача 4.* Известны напряжения и температура на концах стержня:

$$\sigma(x_j, t) = p_j(t), \quad \theta(x_j, t) = \theta_j(t), \quad j = 1, 2. \quad (2.8)$$

*Краевая задача 5.* Известны напряжения на концах стержня, температура и тепловой поток:

$$\begin{aligned} \sigma(x_j, t) &= p_j(t), \quad j = 1, 2, \\ \theta(x_1, t) &= \theta_1(t), \quad \theta_{,x}(x_2, t) = q_2(t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

*Краевая задача 6.* Известны перемещения на концах стержня, температура и тепловой поток:

$$\begin{aligned} u(x_j, t) &= w_j(t), \quad j = 1, 2, \\ \theta(x_1, t) &= \theta_1(t), \quad \theta_{,x}(x_2, t) = q_2(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

*Краевая задача 7.* Известны перемещения и температура на левом конце стержня, напряжения и тепловой поток на правом конце:

$$\begin{aligned} u(x_1, t) &= w_1(t), \quad \theta(x_1, t) = \theta_1(t), \\ \sigma(x_2, t) &= p_2(t), \quad \theta_{,x}(x_2, t) = q_2(t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

*Краевая задача 8.* Известны перемещения и тепловой поток на левом конце стержня, напряжения и температура на правом конце:

$$\begin{aligned} u(x_1, t) &= w_1(t), & \theta_{,x}(x_1, t) &= q_1(t), \\ \sigma(x_2, t) &= p_2(t), & \theta(x_2, t) &= \theta_2(t). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Предполагается, что граничные функции удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$u_j(t) \in C(0, \infty), \quad \theta_j(t) \in C(0, \infty), \quad q_j(t) \in L_1(0, \infty), \quad p_j(t) \in L_1(0, \infty). \quad (2.13)$$

Требуется построить решения этих краевых задач.

## 2.2 Обобщенное решение начально-краевых задач. Метод обобщенных функций

Для решения краевых задач используем метод обобщенных функций [67]. Для этого поставим краевую задачу в пространстве двухмерных обобщенных вектор-функций, компоненты которых принадлежат классу обобщенных функций медленного роста  $S_2'(R^2)$  [65,66]:

$$S_2'(R^2) = \{\hat{f} = (\hat{f}_1(x, t), \hat{f}_2(x, t)), \quad (x, t) \in R^2\}.$$

Для этого введем обобщенные регулярные вектор-функции (помечаем их шапочкой):

$$(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = \{\hat{u}, \hat{\theta}\} = \{u(x, t)H(L - |x|)H(t), \theta(x, t)H(L - |x|)H(t)\}, \quad (2.14)$$

$$(\hat{F}_1, \hat{F}_2) = \{F_1(x, t)H(L - |x|)H(t), F_2(x, t)H(L - |x|)H(t)\}. \quad (2.15)$$

Здесь  $u(x, t), \theta(x, t)$  - классическое решение рассматриваемой краевой задачи,  $H(\dots)$  - функция Хэвисайда,  $H(L - |x|) = H(L - x)H(x + L)$  - характеристическая функция сегмента  $[-1, 1]$ , равная 0,5 на его концах. Это решение КЗ, доопределенное нулем вне области определения.

Найдем обобщенные производные этих функций с учетом правил дифференцирования разрывных регулярных функций [65,66]:

$$\begin{aligned} H(L - |x|) &= H(L - x)H(x + L) \\ H'(L - |x|) &= -\delta(L - x)H(x + L) + H(L - x)\delta(x + L) = \\ &= -\delta(L - x) + \delta(x + L) = \delta(x + L) - \delta(x - L), \\ H''(L - |x|) &= \delta'(x + L) - \delta'(x - L), \\ \hat{\theta} &= \theta(x, t)H(L - |x|)H(t), \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} &= \frac{\partial \theta}{\partial t}H(L - |x|)H(t) + \theta_0(x)\delta(t)H(L - |x|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} &= \frac{\partial \theta}{\partial x} H(t)H(L - |x|) + \theta_1(t)H(t)\delta(x + L) - \theta_2(t)H(t)\delta(x - L), \\
\frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} H(t)H(L - |x|) + q_1(t)\delta(x + L)H(t) - q_2(t)\delta(x - L)H(t) + \\
&\quad + \theta_1(t)H(t)\delta'(x + L) - \theta_2(t)H(t)\delta'(x - L), \\
\hat{u} &= u(x,t)H(L - |x|)H(t), \\
\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t} H(t)H(L - |x|) + u_0(x)\delta(t)H(L - |x|), \\
\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} H(t)H(L - |x|) + v_0(x)\delta(t)H(L - |x|) + u_0(x)\delta'(t)H(L - |x|), \\
\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} H(t)H(L - |x|) + w_1(t)H(t)\delta(x + L) - w_2(t)H(t)\delta(x - L), \\
\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} H(t)H(L - |x|) + p_1(t)\delta(x + L)H(t) - p_2(t)\delta(x - L)H(t) + \\
&\quad + w_1(t)H(t)\delta'(x + L) - w_2(t)H(t)\delta'(x - L),
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Рассмотрим уравнения термоупругости в  $S'_2(R^2)$ . Подставляя  $\{\hat{u}, \hat{\theta}\}$  в (1.3), с учетом этих формул обобщенного дифференцирования, получим систему уравнений вида:

$$\begin{aligned}
c^2 \hat{u}_{,xx} - \hat{u}_{,tt} - \gamma \rho^{-1} \hat{\theta}_{,x} + \hat{F}_1 &= -\{\dot{u}_0(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t)\}H(L - |x|) + \\
&\quad + c^2 H(t)\{(p_1(t) - \tilde{\gamma}\theta_1(t))\delta(x + L) - (p_2(t) - \tilde{\gamma}\theta_2(t))\delta(x - L)\} + \\
&\quad + c^2 H(t)\{w_1(t)\delta'(x + L) - w_2(t)\delta'(x - L)\}, \\
\hat{\theta}_{,xx} - \kappa^{-1} \hat{\theta}_{,t} + \hat{F}_2 &= \\
&= H(t)\delta(L + x)q_1(t) - H(t)\delta(L - x)q_2(t) + \\
&\quad + \theta_1(t)H(t)\delta'(L + x) - \theta_2(t)H(t)\delta'(L - x) - \kappa^{-1}\theta_0(x)\delta(t)H(L - |x|).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Здесь  $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\rho c^2}$ . Заметим, что в правую часть вошли краевые значения перемещений, напряжений, температуры и тепловых потоков, а также начальные значения как дополнительные источники нагружения и нагрева.

Здесь построим решения краевых задач, используя функции Грина волнового уравнения  $U_1(x, t)$  и уравнений теплопроводности  $U_2(x, t)$  [65, 66]:

$$u(x,t)H(t)H(L-|x|) = U_1 * \hat{F}_1 - \tilde{\gamma} U_{1,x} * \hat{\theta}(x,t) +$$

$$+ c^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left\{ (p_k(t) - \tilde{\gamma} \theta_k(t)) * U_{1,t}(x - (-1)^k L, t) + w_k(t) * U_{1,x}(x - (-1)^k L, t) \right\} + \quad (2.18)$$

$$+ \left\{ \dot{u}_0(x) H(L-|x|) * U_{1,x} + u_0(x) H(L-|x|) * U_{1,t} \right\},$$

$$\theta(x,t)H(t)H(L-|x|) = \hat{F}_2(x,t) * U_2(x,t) +$$

$$+ H(t) \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left\{ q_k(t) * U_{2,t}(x - (-1)^k L, t) + \theta_k(t) H(t) * U_{2,x}(x - (-1)^k L, t) \right\} - \quad (2.19)$$

$$- \kappa^{-1} \theta_0(x) H(L-|x|) * U_{2,x}(x,t).$$

$$\hat{U}_1(x,t) = \frac{c}{2} H(ct - |x|), \quad \hat{U}_2(x,t) = \frac{H(t)k}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}, \quad (2.20)$$

Подставляя (2.17) в закон Дюамеля-Неймана (2.3) получим формулу для вычисления термоупругих напряжений в стержне.

Формулы (2.18), (2.19) определяют перемещение и температуру внутри стержня по известным перемещениям, напряжениям, температуре и тепловым потокам на его концах.

Эти формулы удобны для инженерных расчетов, так как позволяют определить воздействие каждого краевого значения этих величин на термонапряженное состояние стержня, если подставить в эти формулы физико-механические и геометрические параметры стержня. В частности, для следующих материалов они имеют следующие значения [68].

Таблица 2.1. Физико-механические параметры материалов

№	Материал	Плотность $\rho \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$	Модуль Юнга E [Па] E · 10 <sup>-9</sup>	Скорость $c \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$	Коэффициент теплового расширения $\alpha \left[ \frac{1}{\text{К}} \right]$ $\alpha \cdot 10^6$	Термоупругий коэффициент $\gamma = \alpha E \left[ \frac{\text{Па}}{\text{К}} \right]$ $\gamma \cdot 10^{-6}$	Коэффициент температуропроводности $\kappa \left[ \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right]$ $\kappa \cdot 10^5$	$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\rho}$
1	Сталь	7860	210	5168.9	12	2.52	1.172	320.61
2	Алюминий	2700	70	5091.75	24	1.68	8.418	622.23

3	Бето н	2350	23.2	3142.0 3	10	0.232	0.167	98.723
---	-----------	------	------	-------------	----	-------	-------	--------

### 2.3 Преобразование Фурье по времени фундаментальных решений и их свойства

Однако для корректно поставленных краевых задач из 8 граничных функций известны только 4. Для определения неизвестных четырех следует построить разрешающие граничные уравнения на левом и правом конце стержня. Для этого рассмотрим обобщенные решения в пространстве преобразования Фурье по времени:

$$\bar{u}(x, \omega) = H(L - |x|) \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\omega t} dt, \quad (2.21)$$

$$u(x, t) = \frac{H(L - |x|)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Вначале построим трансформанты Фурье фундаментальных решений (2.18). Функция Грина волнового уравнения  $U_1(x, t)$  удовлетворяет уравнению Даламбера:

$$c^2 \frac{\partial^2 \hat{U}_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{U}_1}{\partial t^2} + \delta(x)\delta(t) = 0,$$

и условиям излучения:

$$\hat{U}_1(x, t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad \hat{U}_1(x, t) = 0 \text{ при } \|x\| > ct. \quad (2.22)$$

Поскольку при преобразовании Фурье  $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega$ , ее трансформанта Фурье является решением обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 \bar{U}_1}{dx^2} + k^2 \bar{U}_1 + c^{-2} \delta(x) = 0, \quad k = \frac{\omega}{c},$$

В силу условий излучения (2.22) она и ее производная имеют следующий вид:

$$\bar{U}_1(x, \omega) = -\frac{\sin(k|x|)}{2kc^2}, \quad \bar{U}_{1,x} = -\frac{1}{2c^2} \cos(k|x|) \operatorname{sgn}(x). \quad (2.23)$$

Отсюда следует

$$\bar{U}_1(0, \omega) = 0, \quad \bar{U}_{1,x}(\pm 0, \omega) = \mp 0,5c^{-2}. \quad (2.24)$$

Эти свойства используем для построения разрешающих уравнений краевых задач.

## 2.4 Трансформанта Фурье по времени функции Грина уравнения теплопроводности

Трансформанта Фурье функции Грина уравнения теплопроводности удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 \bar{U}_2}{dx^2} + i\omega \kappa^{-1} \bar{U}_2 + \delta(x) = 0 \quad (2.25)$$

и условиям симметрии:

$$\bar{U}_2(x, \omega) = \bar{U}_2(-x, \omega), \quad \bar{U}_2(x, \omega) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (2.26)$$

Нетрудно видеть, что функция

$$\bar{U}_2(x, \omega) = -\frac{\sin k|x|}{2k}, \quad (2.27)$$

удовлетворяет (2.25), где  $k = \sqrt{i\omega \kappa^{-1}}$  и обладает следующими свойствами:

$$\bar{U}_2(0, \omega) = 0, \quad \bar{U}_{2,x}(\pm 0, \omega) = \mp 0,5. \quad (2.28)$$

Для решения поставленных краевых задач построим вначале решение краевой задачи для уравнения теплопроводности. Это можно сделать потому что уравнение теплопроводности не входят упругие деформаций стержня.

## 2.5 Решение температурных краевых задач в пространстве преобразования Фурье по времени

Определим трансформанту Фурье температуры стержня, используя ее представление (2.19) и свойства преобразования Фурье сверток обобщенных функций. В результате получим:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(x, \omega) H(L - |x|) = & \bar{F}_2(x, \omega) \underset{x}{*} \bar{U}_2(x, \omega) + \kappa^{-1} \theta_0(x) H(L - |x|) \underset{x}{*} \bar{U}_2(x, \omega) + \\ & + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left\{ \bar{q}_k(\omega) \bar{U}_2(x - (-1)^k L, \omega) + \bar{\theta}_k(\omega) \bar{U}_{2,x}(x - (-1)^k L, \omega) \right\}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Перейдем к пределу при  $x \rightarrow -L, x \in (-L, L)$  в этой формуле и, используя свойство преобразования Фурье производной фундаментального решения (2.26), получим:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \bar{\theta}(-L + \varepsilon, \omega) = \bar{F}_2(x, \omega) \Big|_x \Big|_{x=-L} \bar{U}_2(x, \omega) - \\
& \quad - \kappa^{-1} \theta_0(x) H(L - |x|) \Big|_x \Big|_{x=-L} \bar{U}_2(x, \omega) - \\
& \quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \bar{q}_1(\omega) \bar{U}_2(\varepsilon, \omega) + \bar{\theta}_1(\omega) \bar{U}_{2,x}(\varepsilon, \omega) \right\} + \\
& \quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \bar{q}_2(\omega) \bar{U}_2(-2L + \varepsilon, \omega) + \bar{\theta}_2(\omega) \bar{U}_{2,x}(-2L + \varepsilon, \omega) \right\}, \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \bar{\theta}(L - \varepsilon, \omega) = \bar{F}_2(x, \omega) \Big|_x \Big|_{x=L} \bar{U}_2(x, \omega) - \\
& \quad - \kappa^{-1} \theta_0(x) H(L - |x|) \Big|_x \Big|_{x=L} \bar{U}_2(x, \omega) - \\
& \quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \bar{q}_1(\omega) \bar{U}_2(2L - \varepsilon, \omega) + \bar{\theta}_1(\omega) \bar{U}_{2,x}(2L - \varepsilon, \omega) \right\} + \\
& \quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \bar{q}_2(\omega) \bar{U}_2(-\varepsilon, \omega) - \bar{\theta}_2(\omega) \bar{U}_{2,x}(-\varepsilon, \omega) \right\}.
\end{aligned}$$

В результате получим граничное уравнение для определения температуры на левом конце стержня:

$$\begin{aligned}
0,5\bar{\theta}(-L, \omega) = & \bar{F}_2(x, \omega) \Big|_x \Big|_{x=-L} \bar{U}_2(x, \omega) - \kappa^{-1} \theta_0(x) H(L - |x|) \Big|_x \Big|_{x=-L} \bar{U}_2(x, \omega) + \\
& + \bar{q}_2(\omega) \bar{U}_2(-2L, \omega) + \bar{\theta}_2(\omega) \bar{U}_{2,x}(-2L, \omega),
\end{aligned}$$

Аналогично, делая предельный переход к правому концу стержня, с учетом (2.28) получим

$$\begin{aligned}
0,5\bar{\theta}(L, \omega) = & \bar{F}_2(x, \omega) \Big|_x \Big|_{x=L} \bar{U}_2(x, \omega) - \kappa^{-1} \theta_0(x) H(L - |x|) \Big|_x \Big|_{x=L} \bar{U}_2(x, \omega) - \\
& - \bar{q}_1(\omega) \bar{U}_2(2L, \omega) - \bar{\theta}_1(\omega) \bar{U}_{2,x}(2L, \omega).
\end{aligned}$$

Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

*Теорема 2.1 Трансформанты Фурье по времени граничных функций краевых задач для уравнения теплопроводности удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений вида:*

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} 0,5 & 0 \\ \bar{U}_{2,x}(2L, \omega) & \bar{U}_2(2L, \omega) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1(\omega) \\ \bar{q}_1(\omega) \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{Bmatrix} \bar{U}_{2,x}(-2L, \omega) & -\bar{U}_2(-2L, \omega) \\ 0,5 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_2(\omega) \\ \bar{q}_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1(-L, \omega) \\ \bar{Q}_2(L, \omega) \end{Bmatrix}, \tag{2.30}
\end{aligned}$$

где правые части определены начальными условиями и действующими тепловыми источниками:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_1(x, \omega) &= \bar{F}_2(x, \omega) *_{x} \bar{U}_2(x, \omega) \Big|_{x=-L} - \kappa^{-1} \theta_0(x) H(L - |x|) *_{x} \bar{U}_2(x, \omega) \Big|_{x=-L}, \\ \bar{Q}_2(x, \omega) &= \bar{F}_2(x, \omega) *_{x} \bar{U}_2(x, \omega) \Big|_{x=L} - \kappa^{-1} \theta_0(x) H(L - |x|) *_{x} \bar{U}_2(x, \omega) \Big|_{x=L}.\end{aligned}$$

Полученная система уравнений позволяет решить любые краевые задачи при заданных двух граничных функций (температуры или теплового потока) на концах стержня. Две другие определяются решением этой системы уравнений.

Для решения всех поставленных температурных краевых задач удобно ввести расширенную систему уравнений вида:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & \bar{U}_{2,x}(-2L, \omega) & -\bar{U}_2(-2L, \omega) \\ \bar{U}_{2,x}(2L, \omega) & \bar{U}_2(2L, \omega) & 0,5 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{\theta}_1(\omega) \\ \bar{q}_1(\omega) \\ \bar{\theta}_2(\omega) \\ \bar{q}_2(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_1(-L, \omega) \\ \bar{Q}_2(L, \omega) \\ \bar{b}_3(\omega) \\ \bar{b}_4(\omega) \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

где последние два уравнения – это краевые условия на концах стержня:

$$\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\theta}_1(\omega) \\ \bar{q}_1(\omega) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\theta}_2(\omega) \\ \bar{q}_2(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_3(\omega) \\ \bar{b}_4(\omega) \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

При заданных коэффициентах  $a_{ij}$  и правой части  $\bar{b}_i(\omega)$  этой линейной алгебраической системы уравнений ее решение имеет вид:

$$D_j(\omega) = \frac{\Delta_j(\omega)}{\Delta(\omega)}, \quad D_j(\omega) = \{\bar{\theta}_1(\omega) \quad \bar{q}_1(\omega) \quad \bar{\theta}_2(\omega) \quad \bar{q}_2(\omega)\}, \quad (2.33)$$

где  $\Delta(\omega)$  - основной определитель матрицы системы (2.31),  $\Delta_j(\omega)$  вспомогательный определитель матрицы, которая определяется простым правилом Крамера для каждого  $D_j(\omega)$ .

В качестве примера построим решения для температурного поля некоторых краевых задач.

### 2.5.1 Температурное решение для Краевой Задачи 1

В этом случае известны температура на концах стержня:  $\bar{\theta}(x_j, \omega) = \bar{\theta}_j(\omega)$ ,  $j = 1, 2$ . Тогда краевые условия (2.32) имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1(\omega) \\ \bar{q}_1(\omega) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_2(\omega) \\ \bar{q}_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{b}_3(\omega) \\ \bar{b}_4(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1(\omega) \\ \bar{\theta}_2(\omega) \end{Bmatrix}.$$

Подставляя эти коэффициенты и левую часть уравнений (2.31), получим решение (2.33) для определения тепловых потоков на концах стержня:

$$\bar{q}_1(\omega) = \frac{1}{\bar{U}_2(2L, \omega)} \left( \bar{Q}_2(L, x) - \bar{U}_{2,x}(2L, \omega) \bar{\theta}_1(\omega) - 0,5 \bar{\theta}_2(\omega) \right),$$

$$\bar{q}_2(\omega) = -\frac{1}{\bar{U}_2(-2L, \omega)} \left( \bar{Q}_1(-L, x) + \bar{U}_{2,x}(-2L, \omega) \bar{\theta}_2(\omega) - 0,5 \bar{\theta}_1(\omega) \right).$$

На рисунках 2.1 – 2.3 представлены графики изменения температуры вдоль стержня в фиксированных точках стержня при стационарных колебаниях температуры на концах стержня с разными периодами колебаний  $T = 2\pi / \omega$  при заданных амплитудах колебаний температуры на концах стержня :  $A_1=1, A_2=2$ .

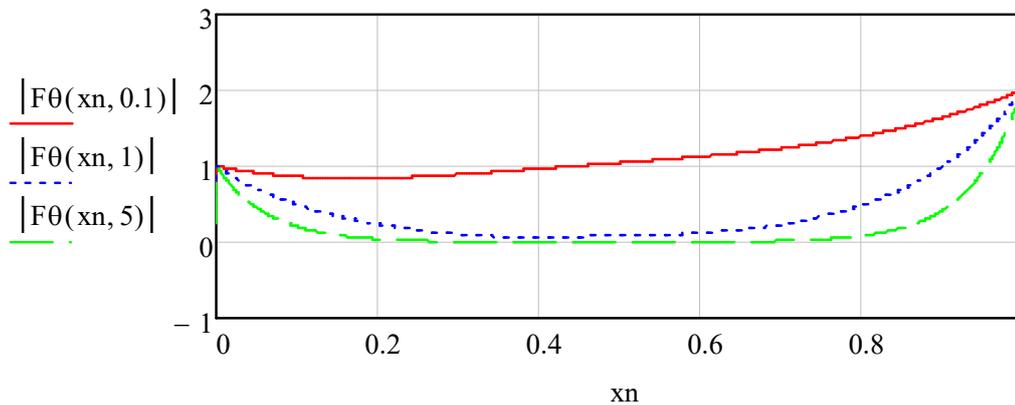


Рисунок 2.1. - Амплитуда колебаний температуры стержня  $|\bar{\theta}(x, \omega)|$ :  $\kappa = 0.01, \omega = 0.1; 1; 5$ .

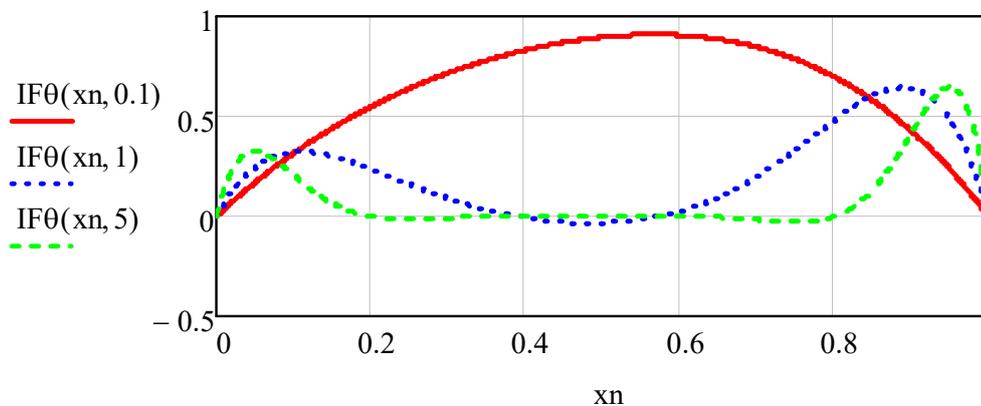


Рисунок 2.2. - Температура стержня  $\theta(x, t)$  в моменты времени  $t = \Pi n$  (a) и  $t = \Pi n + \Pi/4$  (b):  $\omega = 0.1; 1; 5$ .

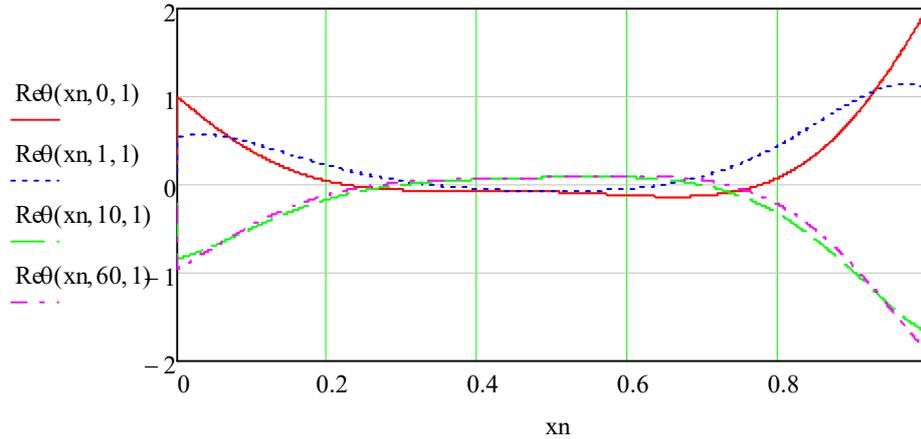


Рисунок 2.3. Изменение температуры вдоль стержня в фиксированные моменты времени:  $t=0, 1, 10, 60$ ;  $\omega=1$ .

Расчеты проведены в безразмерных параметрах:  $\tilde{x} = \frac{x}{L}$ ,  $\tilde{t} = \frac{t}{T}$ ,  $\tilde{\kappa} = \frac{L^2}{T} \kappa$ .

### 2.5.2 Решение Краевой Задачи 2 (Задача Неймана)

Здесь известны тепловые потоки на концах стержня:  $\bar{\theta}_{,x}(x_j, \omega) = \bar{q}_j(\omega)$ ,  $j = 1, 2$ .  
Краевые условия (2.32) имеют следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1(\omega) \\ \bar{q}_1(\omega) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_2(\omega) \\ \bar{q}_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{b}_3(\omega) \\ \bar{b}_4(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_1(\omega) \\ \bar{q}_2(\omega) \end{Bmatrix}.$$

Тогда можно вычислить трансформанту Фурье температуры на концах стержня:

$$\bar{\theta}_1(\omega) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \bar{\theta}_2(\omega) = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,5 & -\bar{U}_{2,x}(-2L, \omega) \\ \bar{U}_{2,x}(2L, \omega) & 0,5 \end{vmatrix} = 0,25 + \bar{U}_{2,x}(-2L, \omega)\bar{U}_{2,x}(2L, \omega),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \bar{Q}_1 + \bar{U}_2(-2L, \omega)\bar{q}_2 & -\bar{U}_{2,x}(-2L, \omega) \\ \bar{Q}_2 - \bar{U}_2(2L, \omega)\bar{q}_1 & 0,5 \end{vmatrix} =$$

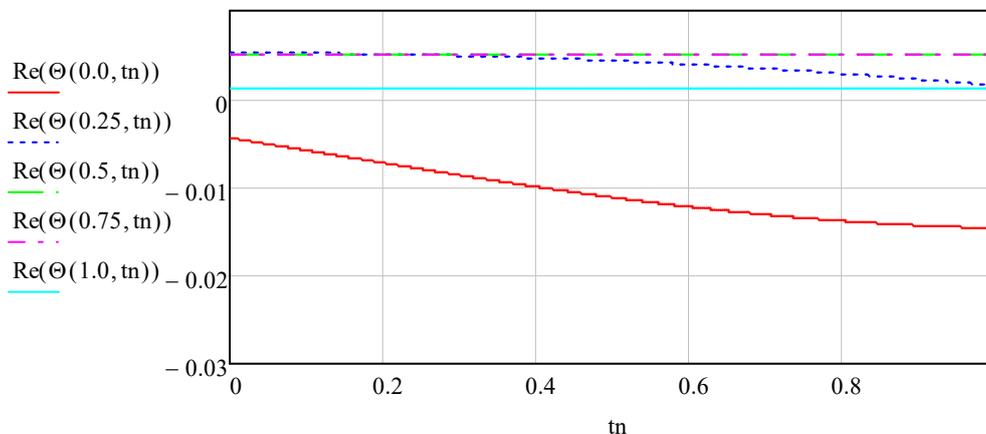
$$= 0,5(\bar{Q}_1 + \bar{U}_2(-2L, \omega)\bar{q}_2) + \bar{U}_{2,x}(-2L, \omega)(\bar{Q}_2 - \bar{U}_2(2L, \omega)\bar{q}_1),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,5 & \bar{Q}_1 + \bar{U}_2(-2L, \omega)\bar{q}_2 \\ \bar{U}_{2,x}(2L, \omega) & \bar{Q}_2 - \bar{U}_2(2L, \omega)\bar{q}_1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0,5(\bar{Q}_2 - \bar{U}_2(2L, \omega)\bar{q}_1) - \bar{U}_{2,x}(2L, \omega)(\bar{Q}_1 + \bar{U}_2(-2L, \omega)\bar{q}_2).$$

Подставляя найденные краевые функции в формулу (2.29), находим трансформанту Фурье температуры стержня. Подставляя (2.29) в (2.21) получим оригинал. Таким образом температура стержня определена для этих краевых задач.

На рисунках 2.4 – 2.6 представлены графики изменения температуры вдоль стержня при  $\kappa=0.01$  в фиксированных точках стержня при экспоненциальном нагреве на левом конце стержня и нулевом тепловом потоке на правом конце:  $q_1(t) = A_1 e^{\alpha t}$ ,  $A_1 = 1$ ,  $\alpha = 1$ .



Р и с у н о к 2.4 Изменение температуры  
изменение в разных точках стержня с  
течением времени

Для расчетов использовались безразмерные параметры:  $x' = x / L$ ,  $t' = t / \Pi$ ,  $\kappa' = \Pi \times \kappa / L^2$ , где  $L$  – длина стержня,  $\Pi$  – характерное время,  $\kappa$  – коэффициент температуропроводности.

Матрица краевых условий позволяет строить решение краевых задач при любых заданных двух краевых функций из четырех. Таких вариантов может быть 6. Все решения для них построены.

## 2.6 Решение упругой краевой задачи в пространстве преобразования Фурье по времени

Определим трансформанту Фурье перемещений стержня, используя их представление (2.18) и свойства преобразования Фурье сверток обобщенных функций. Поскольку температура стержня определена, то ее можно рассматривать как внешнюю заданную силу, которую вместе с действующей на стержень силой, обозначим известными начальными условиями:

$$\begin{aligned} \bar{P}(x, \omega) = & \bar{F}_1 * \bar{U}_1 + \left\{ (\dot{u}_0(x) - i\omega u_0(x)) H(L - |x|) \right\}_x * \bar{U}_1 - \\ & - \tilde{\gamma} \bar{U}_{1,x} * \bar{\theta}(x, \omega) - c^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^k \tilde{\gamma} \bar{\theta}_k(\omega) \bar{U}_1(x - (-1)^k L, \omega). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Из формулы (10) следует представление перемещений в пространстве преобразования Фурье по времени:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, \omega) H(L - |x|) = & \bar{P}(x, \omega) + \\ & + c^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left\{ (\bar{p}_j(\omega)) \bar{U}_1(x - (-1)^j L, \omega) + \bar{w}_j(\omega) \bar{U}_{1,x}(x - (-1)^j L, \omega) \right\}. \end{aligned}$$

С учетом вида функции Грина волнового уравнения (2.23), получим обобщенное решение краевых задач в виде:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, \omega) H(L - |x|) = & \left\{ \bar{P}(x, \omega) - 0,5k^{-1} \bar{p}_1(\omega) \sin(k|x + L|) \right. \\ & + 0,5 \bar{p}_2(\omega) k^{-1} \sin(k|x - L|) + \\ & + 0,5 \bar{w}_1(\omega) \cos(k|x + L|) \operatorname{sgn}(x + L) + \\ & \left. + 0,5 \bar{w}_2(\omega) \cos(k|x - L|) \operatorname{sgn}(x - L) \right\}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Если перейти в этой формуле к пределу к концам интервала, с учетом свойства производной функции Грина (2.24), получим уравнения для определения неизвестных граничных значений перемещений. Например, перенося  $0,5 \bar{w}_1(\omega)$  вправо получим разрешающее уравнение на левом конце стержня:

$$0,5 \bar{w}_1(\omega) = \bar{P}(x, \omega) \Big|_{x=-L} - 0,5k^{-1} \bar{p}_2(\omega) \sin(2Lk) + 0,5 \bar{w}_2(\omega) \cos(2Lk)$$

На правом конце стержня, рассмотрим предел:

$$\begin{aligned} \bar{u}(L, \omega) = & \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \bar{u}(L - \varepsilon, \omega) = \\ = & \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \bar{P}(x, \omega) - 0,5k^{-1} \bar{p}_1(\omega) \sin(k|x + L|) + 0,5 \bar{p}_2(\omega) k^{-1} \sin(k|x - L|) + \right. \\ & \left. + 0,5 \bar{w}_1(\omega) \cos(k|x + L|) \operatorname{sgn}(x + L) + 0,5 \bar{w}_2(\omega) \cos(k|x - L|) \operatorname{sgn}(x - L) \right\} \Big|_{x=L-\varepsilon} = \\ = & \bar{P}(L, \omega) - 0,5 \bar{p}_1(\omega) k^{-1} \sin(2kL) + 0,5 \bar{w}_1(\omega) \cos(2kL) + 0,5 \bar{w}_2(\omega) = \bar{w}_2(\omega) \end{aligned}$$

Переноса  $0,5\bar{w}_2(\omega)$  вправо получим разрешающее уравнение на левом конце стержня:

$$0,5\bar{w}_2(\omega) = \bar{P}(x, \omega)|_{x=L} - 0,5k^{-1}\bar{p}_1(\omega)\sin(2Lk) + 0,5\bar{w}_1(\omega)\cos(2Lk).$$

Аналогично получим уравнение на правом конце стержня. Результат сформулируем в виде теоремы.

*Теорема 2.2 Трансформанты Фурье по времени граничных функций краевых задач для волнового уравнения удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений вида:*

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} 0,5 & 0 \\ -0,5\cos(2Lk) & 0,5k^{-1}\sin(2Lk) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1(\omega) \\ \bar{p}_1(\omega) \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{Bmatrix} -0,5\cos(2Lk) & -0,5k^{-1}\sin(2Lk) \\ 0,5 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_2(\omega) \\ \bar{p}_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}(-L, \omega) \\ \bar{P}(L, \omega) \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

где правые части определены начальными условиями и действующими тепловыми источниками (2.40).

В зависимости от решаемой краевой задачи из этой системы двух линейных алгебраических уравнений, с учетом краевых условий, получим разрешающие граничные уравнения для определения трансформант неизвестных граничных функций.

Аналогично тепловой задаче удобно ввести расширенную матрицу краевых задач и решать систему уравнений вида:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & \cos(2Lk) & -k^{-1}\sin(2Lk) \\ -\cos(2Lk) & -k^{-1}\sin(2Lk) & 1 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \bar{w}_1(\omega) \\ \bar{p}_1(\omega) \\ \bar{w}_2(\omega) \\ \bar{p}_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\bar{P}(-L, \omega) \\ 2\bar{P}(L, \omega) \\ \bar{d}_3(\omega) \\ \bar{d}_4(\omega) \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

где последние два уравнения – это краевые условия на перемещения и напряжения на концах стержня (с учетом известной температуры):

$$\begin{Bmatrix} \beta_{31} & \beta_{32} \\ \beta_{41} & \beta_{42} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1(\omega) \\ \bar{p}_1(\omega) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{43} & \beta_{44} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_2(\omega) \\ \bar{p}_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{b}_3(\omega) \\ \bar{b}_4(\omega) \end{Bmatrix}.$$

При заданных коэффициентах  $\beta_{ij}$  и правой части  $\bar{b}_i(\omega)$  этой линейной алгебраической системы уравнений ее решение определяется простым правилом Крамера.

Теперь в формуле (2.41) все граничные функции определены. Выполняя обратное преобразование Фурье, получим оригинал решения в исходном пространстве-времени. Построение оригинала зависит от вида преобразования Фурье граничных функций и должно рассматриваться отдельно для конкретной краевой задачи. Подставляя известные значения температур и перемещений в формулу (2.3) получим термоупругие напряжения в стержне.

В качестве примера приведем расчеты двух краевых задач.

### 2.6.1 Решение Краевой Задачи 1

Известны перемещения на концах стержня:  $\bar{u}(x_j, \omega) = \bar{w}_j(\omega)$ ,  $j = 1, 2$ . Тогда, с учетом (2.42), получим уравнения для определения граничных напряжений:

$$\bar{p}_1(\omega) = -\frac{2\bar{P}(L, \omega) - \bar{w}_1(\omega)\cos(2Lk) - \bar{w}_2(\omega)}{k^{-1}\sin(2Lk)},$$

$$\bar{p}_2(\omega) = \frac{2\bar{P}(-L, \omega) + \bar{w}_2(\omega)\cos(2Lk) - \bar{w}_1(\omega)}{k^{-1}\sin(2Lk)}.$$

### 2.6.2 Решение Краевой Задачи 2

Известны напряжения на концах стержня:  $\bar{\sigma}(x_j, \omega) = \bar{p}_j(\omega)$ ,  $j = 1, 2$ . Тогда из (2.42) получим уравнения для определения граничных перемещений:

$$\begin{Bmatrix} 1 & -\cos(2Lk) \\ \cos(2Lk) & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1(\omega) \\ \bar{w}_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\bar{P}(-L, \omega) - k^{-1}\bar{p}_2(\omega)\sin(2Lk) \\ 2\bar{P}(L, \omega) + k^{-1}\bar{p}_1(\omega)\sin(2Lk) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_1(\omega) \\ \bar{f}_2(\omega) \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\bar{w}_j(\omega) = \frac{\Delta_j(\omega)}{\Delta(\omega)}, \quad \Delta(\omega) = 1 + \cos^2(2Lk),$$

$$\Delta_1 = \bar{f}_1(\omega) + \bar{f}_2(\omega)\cos(2Lk), \quad \Delta_2 = \bar{f}_2(\omega) - \bar{f}_1(\omega)\cos(2Lk).$$

## 2.7 Построение оригинала решения $u(x, t), \theta(x, t)$

Для построения оригинала решения достаточно определить оригиналы неизвестных граничных функций, которые определены выше. Для построения решения КЗ в исходном пространстве-времени используем тензор Грина  $U_i^j(x, y)$  уравнений термодинамики (Теорема 1.1) и его свойство.

Решение системы уравнений (2.17) в исходном пространстве-времени имеет вид тензорно-функциональной свертки:

$$\begin{aligned}\hat{u}(x,t) &= U_1^1(x,t) * (\hat{F}_1(x,t) - \hat{G}_1(x,t)) + U_1^2(x,t) * (\hat{F}_2(x,t) - \hat{G}_1(x,t)), \\ \hat{\theta}(x,t) &= U_2^2(x,t) * (\hat{F}_2(x,t) - \hat{G}_2(x,t)).\end{aligned}\tag{2.43}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\hat{G}_1(x,t) &= -\{\dot{u}_0(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t)\}H(L - |x|) + \\ &+ c^2 H(t) \{(p_1(t) - \tilde{\gamma}\theta_1(t))\delta(x+L) - (p_2(t) - \tilde{\gamma}\theta_2(t))\delta(x-L)\} + \\ &+ c^2 H(t) \{w_1(t)\delta'(x+L) - w_2(t)\delta'(x-L)\}, \\ \hat{G}_2(x,t) &= H(t)\delta(L+x)q_1(t) - H(t)\delta(L-x)q_2(t) + \\ &+ \theta_1(t)H(t)\delta'(L+x) - \theta_2(t)H(t)\delta'(L-x) - \kappa^{-1}\theta_0(x)\delta(t)H(L - |x|)\end{aligned}$$

Рассмотрим последовательно сверки компонент тензора Грина с каждым слагаемым правой части соотношения (2.43) по отдельности, которые позволяют оценить влияние каждого граничного и начального условия на термонапряженное состояние стержня.

Влияние на перемещение сечений стержня  
от действующих силовых источников –

$$U_1^1(x,t)H(t) * F_1(x,t)H(t)H(L - |x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_1^1(x-y,\tau)H(\tau)F_1(y,t-\tau)dy = A_{u1}(x,t);$$

от действующих тепловых источников –

$$U_1^2(x,t)H(t) * F_2(x)H(t)H(L - |x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_1^2(x-y,\tau)F_2(y,t-\tau)dy = A_{u2}(x,t);$$

начальных условий –

(от перемещений и скоростей)

$$\begin{aligned}U_1^1(x,t)H(t) * u_0(t)\delta'(t)H(L - |x|) &= U_{1,t}^1(x,t)H(t) *_{x} u_0(x)H(L - |x|) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} U_{1,t}^1(x-y,t)u_0(y)H(L - |y|)dy = \int_{-L}^L U_{1,t}^1(x-y,t)u_0(y)dy = A_{u3}(x,t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_1^1(x,t)H(t) * \nu_0(t)\delta(t)H(L - |x|) = U_1^1(x,t)H(t) * \nu_0(x)H(L - |x|) = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} U_1^1(x-y,t)\nu_0(y)H(L - |y|)dy = \int_{-L}^L U_1^1(x-y,t)\nu_0(y)dy = A_{u4}(x,t);
\end{aligned}$$

(от температуры)

$$\begin{aligned}
& U_1^2(x,t)H(t) * k^{-1}\theta_0(x)\delta(t)H(L - |x|) = U_1^2(x,t)H(t) * k^{-1}\theta_0(x)H(L - |x|) = \\
& = k^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} U_1^2(x-y,t)H(t)\theta_0(y)H(L - |y|)dy = k^{-1}H(t) \int_{-L}^L U_1^2(x-y,t)\theta_0(y)dy = A_{u5}(x,t);
\end{aligned}$$

перемещений на концах стержня -

$$\begin{aligned}
& U_1^1(x,t)H(t) * (u_1(t)H(t)\delta(x+L) - u_2(t)H(t)\delta(x-L)) = \\
& = \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} H(t) \int_0^t U_1^1(x - (-1)^j L, \tau) u_j(t - \tau) d\tau = A_{u6}(x,t);
\end{aligned}$$

температуры на концах стержня -

$$\begin{aligned}
& U_1^1(x,t)H(t) * \tilde{\gamma}\theta_1(t)H(t)\delta(x+L) + U_1^1(x,t)H(t) * \tilde{\gamma}\theta_2(t)H(t)\delta(x-L) = \\
& = U_1^1(x+L,t)H(t) * \tilde{\gamma}\theta_1(t)H(t)\delta(x) + U_1^1(x-L,t)H(t) * \tilde{\gamma}\theta_2(t)H(t)\delta(x) = \\
& = \tilde{\gamma}H(t) \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_0^t U_1^1(x - (-1)^j L, \tau) \theta_j(t - \tau) d\tau = A_{u7}(x,t); \\
& U_1^2(x,t)H(t) * \theta_1(t)H(t)\delta'(x+L) - U_1^2(x,t)H(t) * \theta_2(x)H(t)\delta'(x-L) = \\
& = \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} H(t) \int_0^t U_{1,x}^2(x - (-1)^j L, \tau) \theta_j(t - \tau) d\tau = A_{u8}(x,t);
\end{aligned}$$

напряжений на концах стержня -

$$\begin{aligned}
& U_1^1(x,t)H(t) * d_1(t)H(t)\delta'(x+L) - U_1^1(x,t)H(t) * d_2(t)H(t)\delta'(x-L) = \\
& = U_{1,x}^1(x+L,t)H(t) * d_1(t)H(t) - U_{1,x}^1(x-L,t)H(t) * d_2(t)H(t) = \\
& = \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} H(t) \int_0^t U_{1,x}^1(x - (-1)^j L, \tau) d_j(t-\tau) d\tau = A_{u9}(x,t);
\end{aligned}$$

*тепловых потоков на концах стержня -*

$$\begin{aligned}
& U_1^2(x,t)H(t) * q_1(x)H(t)\delta(x+L) - U_1^2(x,t)H(t) * q_2(x)H(t)\delta(x-L) = \\
& = \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} H(t) \int_0^t U_1^2(x - (-1)^j L, \tau) q_j(t-\tau) d\tau = A_{u10}(x,t).
\end{aligned}$$

Теперь, перейдем к описанию влияния начальных и краевых условий на температуру стержня  
*от действующих тепловых источников -*

$$U_2^2(x,t) * \hat{F}_2(x,t) = \dots = A_{\theta1}(x,t);$$

*от тепловых потоков на концах стержня -*

$$-U_2^2(x,t) * (H(t)\delta(L+x)q_1(t) - H(t)\delta(L-x)q_2(t)) = \dots = A_{\theta2}(x,t);$$

*от температуры на концах стержня -*

$$-U_2^2(x,t) * (\theta_1(t)H(t)\delta'(L+x) - \theta_2(t)H(t)\delta'(L-x)) = \dots = A_{\theta3}(x,t);$$

*от начальных условий -*

$$U_2^2(x,t) * \kappa^{-1}\theta_0(x)\delta(t)H(L-|x|) = \dots = A_{\theta4}(x,t);$$

Окончательно, имеем интегральное соотношение для определения  $u(x,t)$  :

$$\hat{u}(x,t) = u(x,t)H(t)H(L-|x|) = \sum_{j=1}^{10} A_{uj}(x,t), \quad (2.44)$$

$$\hat{\theta}(x,t) = \theta(x,t)H(t)H(L-|x|) = \sum_{j=1}^4 A_{\theta j}(x,t).$$

$$\begin{aligned} \hat{u}(x,t) &= U_1^1(x,t) * \hat{F}_1(x,t) + U_1^2(x,t) * \hat{F}_2(x,t) = \\ &= -H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_1^1(x-y,\tau) H(\tau) F_1(y,t-\tau) dy + \\ &+ \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} H(t) \int_0^t U_1^1(x - (-1)^j L, \tau) u_j(t-\tau) d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} H(t) \int_0^t U_{1,x}^1(x - (-1)^j L, \tau) d_j(t-\tau) d\tau - \\ &- \int_{-L}^L U_1^1(x-y,t) \nu_0(y) dy - \int_{-L}^L U_{1,t}^1(x-y,t) u_0(y) dy - \\ &- \tilde{\gamma} H(t) \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_0^t U_1^1(x - (-1)^j L, \tau) \theta_j(t-\tau) d\tau + \\ &+ H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_1^2(x-y,\tau) F_2(y,t-\tau) dy + \\ &+ \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} H(t) \int_0^t U_1^2(x - (-1)^j L, \tau) q_j(t-\tau) d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} H(t) \int_0^t U_{1,x}^2(x - (-1)^j L, \tau) \theta_j(t-\tau) d\tau + \\ &+ k^{-1} H(t) \int_{-L}^L U_1^2(x-y,t) \theta_0(y) dy \end{aligned}$$

Полученные формулы удобны для инженерных расчетов, так как позволяют рассчитать влияние на термонапряженное состояние стержня отдельно для каждого краевого условия на разных концах стержня.

## 2.8 Динамика упругого стержня при стационарных колебаниях.

### 2.8.1 Задача Дирихле

На рисунке 2.5 представлен график амплитуды перемещений сечений стержня в фиксированных точках стержня при стационарных колебаниях перемещения на левом конце стержня и с закрепленным правым концом при безразмерных параметрах  $\tilde{x} = x / L, \tilde{t} = t / T, T = L / c$ . Амплитуды колебаний  $A_1=0.01; A_2=0$ .

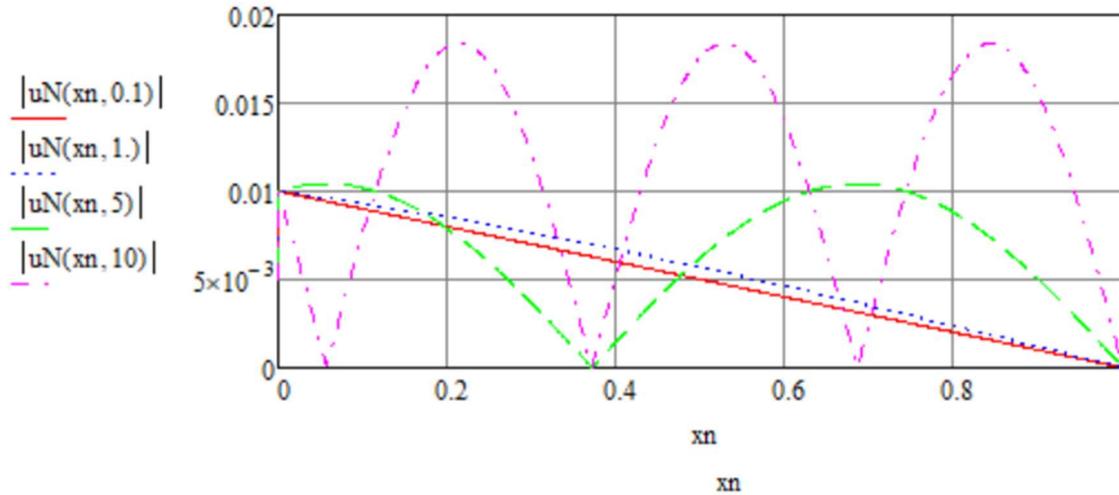


Рис 2.5 – Амплитуда колебаний сечений стержня  $|u(x, \omega)|$ :  
 $\omega = 0.1, 1.0, 5.0, 10.0$

Здесь наблюдаем линейное убывание смещение стержня при низких частотах. При более высоких частотах в стержне образуются стоячие волны. В узлах амплитуда колебаний равна 0.

На рисунке 2.6 представлен график перемещений сечений стального стержня в фиксированных точках при реальных параметрах в системе СИ (параметры см.Табл.2.1) при стационарных колебаниях перемещения на левом конце стержня и с закрепленным правым концом. Амплитуды колебаний  $A_1=0.01\text{м}, A_2=0$ .

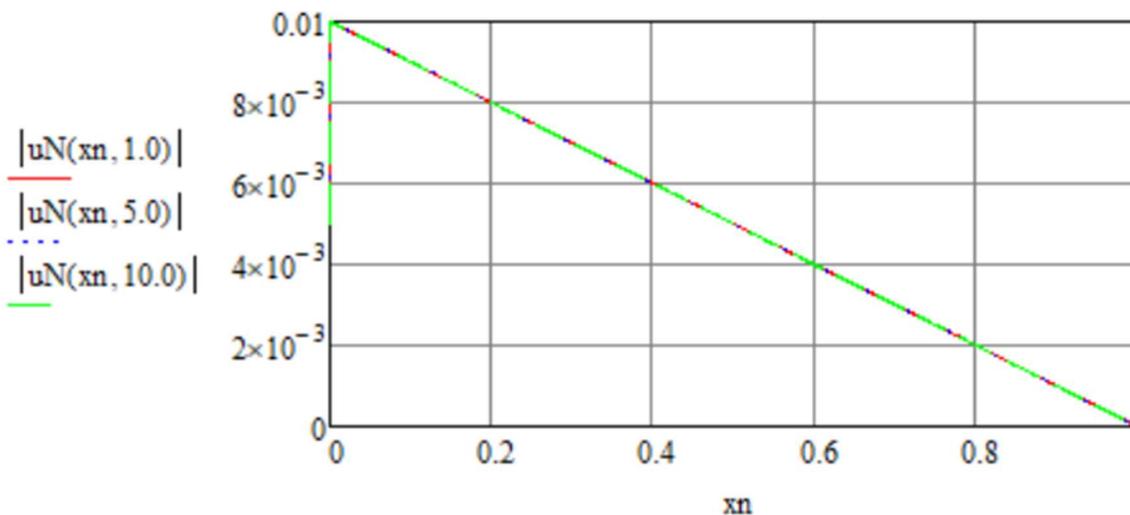
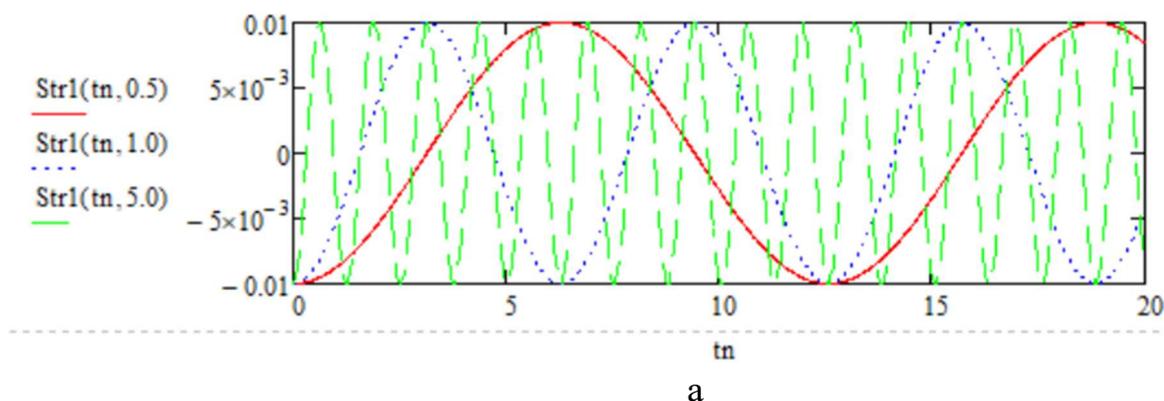
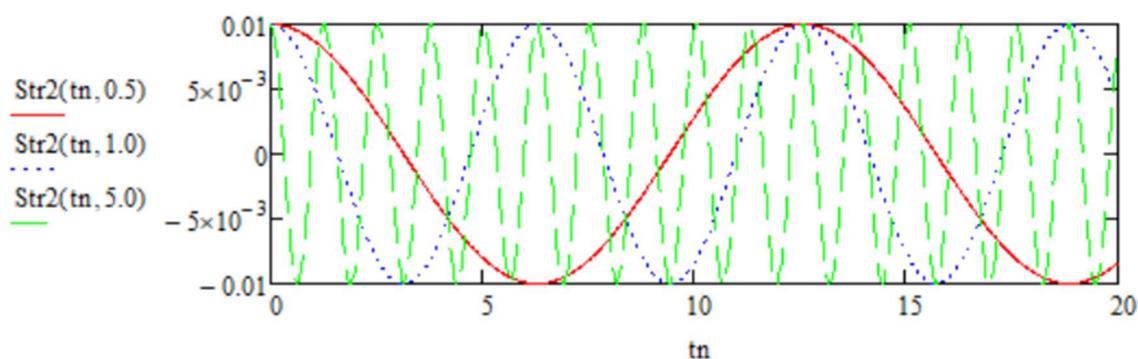


Рис 2.6 – Амплитуда колебаний сечений стержня  $|u(x, \omega)|$   
 при разных частотах:  $\omega = 1, 5, 10 [1 / T]$ .



а



б

Рис 2.8 – Колебания напряжений  $\sigma(x, t) = E \times \text{Str}(t, \omega) \exp(i\omega t)$  при разных частотах на концах стержня:  $x=0$  (а),  $x=1\text{м}$  (б) ;  $\omega = 1, 5, 10 [1 / T]$ .

Как показывают расчеты на Рис 2.6, амплитуда колебаний перемещений стержня линейно падает от максимальной на левом конце стержня до 0 на правом.

На Рис 2.7, показаны перемещения точек стержня в фиксированный момент времени  $t$ . Наблюдается такое же линейное падение.

На Рис. 2.8 наблюдаем противофазные напряжения на концах стержня, что связано с закреплением одного из его концов.

В рассмотренном диапазоне частот стоячие волны не наблюдались.

На Рис. 2.9 показано изменение модуля определителя матрицы разрешающей системы уравнений (2.43) при разных частотах в точках  $\omega_n$ , где модуль равен нулю, стационарных решений не существует. Эти частоты являются резонансными. При воздействиях таких периодических нагрузках

амплитуда колебаний стержня возрастает, что может привести к превышению предела прочности и разрушению.

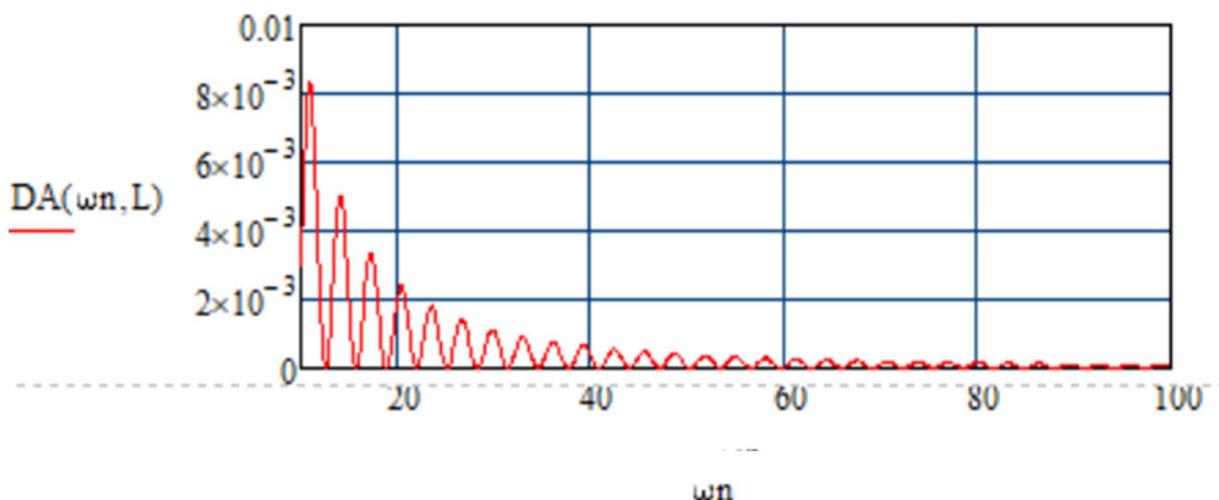


Рис 2.9– Изменение модуля определителя матрицы разрешающей системы уравнений (2.43) при разных частотах

**2.8.2 Задача Неймана-Дирихле.** На рисунке 2.10 представлен график амплитуды перемещений сечений стержня в фиксированных точках стержня при стационарных колебаниях напряжений на левом конце стержня с амплитудой  $p_1=0.01E$ , и с закрепленным правым концом  $w_2=0.0$  при разной частоте колебаний (расчеты в безразмерных параметрах). Также мы наблюдаем при повышении частоты колебаний образование стоячих волн.

На рисунке 2.11 реальная часть изображает перемещение сечений стержня в моменты времени  $t=0.5+Tn$  ( $\text{Re}(u(x,t))$ ), а мнимая часть ( $\text{Im}(u(x,t))$ ) – состояние стержня через четверть периода при  $\omega = 10$ , период колебаний  $T = 2\pi / \omega$ .

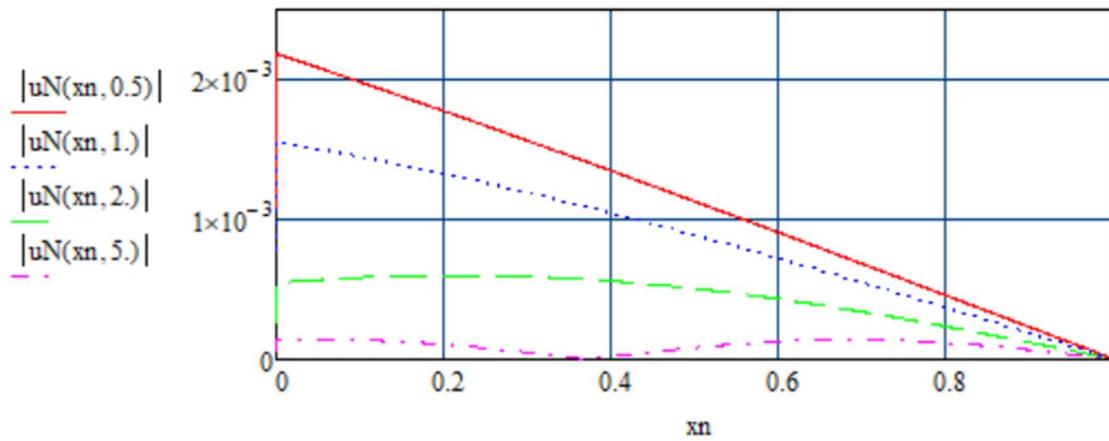


Рис 2.10 Амплитуды колебаний сечений стержня при разных частотах:  $\omega = 0.5, 1, 2, 5$

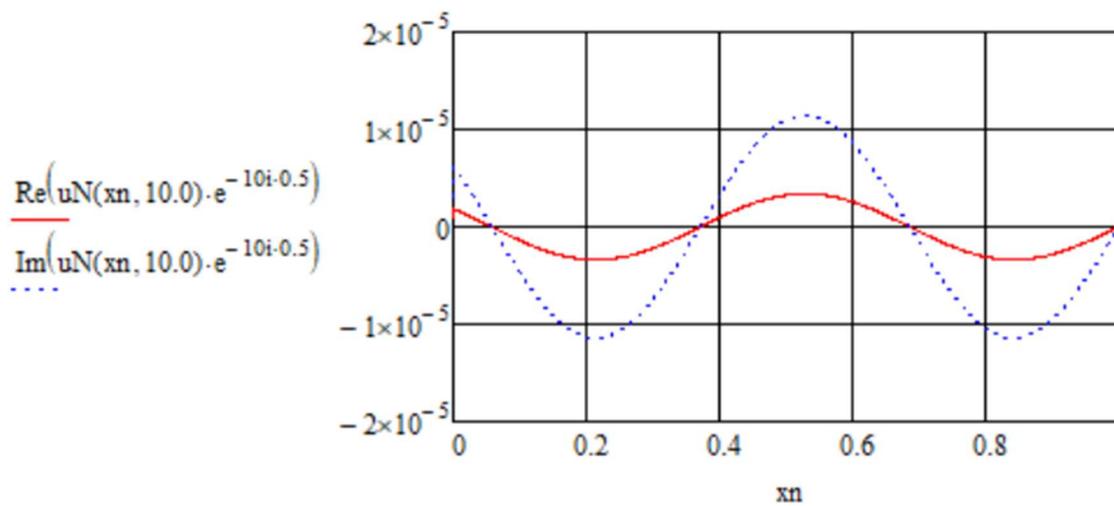


Рис 2.11 Перемещение сечений стержня в моменты времени  $t=0.5+Tn$  ( $\text{Re}(u(x,t))$ ) и через четверть периода ( $\text{Im}(u(x,t))$ ) при  $\omega = 10, T = 0.2\pi$

## ВЫВОДЫ

1. На основе метода обобщенных функций разработана методика расчета температуры стержня при различных условиях на температуру и тепловые потоки на его концах.
2. На основе метода обобщенных функций разработана методика расчета перемещений и напряжений упругого стержня при различных условиях на перемещения и напряжения на его концах.
3. На основе полученных решений этих краевых задач разработана методика расчета термонапряженного состояния стержня при различных краевых условиях на температуру, тепловые потоки, перемещение и напряжения на его концах.
4. На основе этой методики в системе MatCad 15 разработаны программы расчета температуры стержня при различных условиях на температуру и тепловые потоки на его концах и проведены компьютерные эксперименты при разных термоупругих параметрах стержня и частотах колебаний.
5. На основе этой методики в системе MatCad 15 разработаны программы расчета перемещений и напряжений стержня при различных условиях на перемещения и напряжения на его концах и проведены компьютерные эксперименты при разных параметрах стержня и частотах колебаний.
6. На основе этой методики в системе MatCad 15 разработаны программы расчета перемещений и температуры термоупругого стержня при различных условиях на перемещения и температуру на его концах и проведены компьютерные эксперименты при разных параметрах стержня и частотах колебаний.

Результаты работы, представленной в данном разделе, были опубликованы в двух статьях [4,5,7] (см. Публикации, стр 14) и представлены на конференциях [3,4,5] (см. Тезисы докладов, стр 15).

### 3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ТЕРМОУПРУГИХ ГРАФАХ И ИХ РЕШЕНИЯ

С развитием машиностроения стали активно применяться сложные многозвенные стержневые конструкции, работающие в различных термических условиях. Они широко используются в строительной механике, машиностроении, робототехнике и многих других областях. Актуальной научно-технической задачей является исследование термонапряженного состояния сетевых систем различного назначения при динамических и термических воздействиях с учетом их термоупругих свойств при динамических и термических воздействиях, в том числе видов воздействия. Это необходимо для анализа прочности и надежности конструкций таких объектов, определения безопасных режимов эксплуатации и предотвращения катастроф.

Математическое моделирование термодинамики стержневых конструкций и создание на его основе информационных технологий является одним из наиболее эффективных и недорогих методов исследования и проектирования таких систем. Здесь рассматриваются краевые задачи несвязанной термоупругости на звездообразном термоупругом графе, который может быть использован для исследования различных стержневых структур в условиях термического нагрева.

На основе метода обобщенных функций разработана унифицированная методика решения краевых задач несвязанной термоупругости, типичных для технических приложений. Построены обобщенные решения нестационарных и стационарных краевых задач несвязанной термоупругости на звездном графе при различных граничных условиях на концах графа и обобщенных условиях Кирхгофа в его общей вершине. В аналитическом виде получены регулярные интегральные представления решений краевых задач.

Полученные решения позволяют моделировать источники силы и тепла различного типа, в том числе с использованием сингулярных обобщенных функций. Представленный здесь метод обобщенных функций позволяет решать широкий класс краевых задач с локальными и связными граничными условиями на концах ребер графа и различными условиями передачи в его узле.

Граф — это геометрическая фигура, которая состоит из точек и линий, которые их соединяют. Точки называют *вершинами* графа, а линии — *ребрами* (рис. 3.1).

Граф называется *звездным*, если все ребра соединяются друг с другом в одном узле. ( $N$ -ребер, 1 вершина).

Граф называется *сетевым*, если состоит из линейных и звездных графов. ( $N$ -ребер, число вершин определяется структурой графа).

Граф называется *решетчатым*, если он состоит из замкнутых линейных графов, либо содержит их. ( $N$ -ребер, число вершин определяется структурой графа). Решетка может быть *открытой*, если ребра графа имеют свободные концы. Решетка может быть *замкнутой*, если ребра графа не имеют свободных концов.

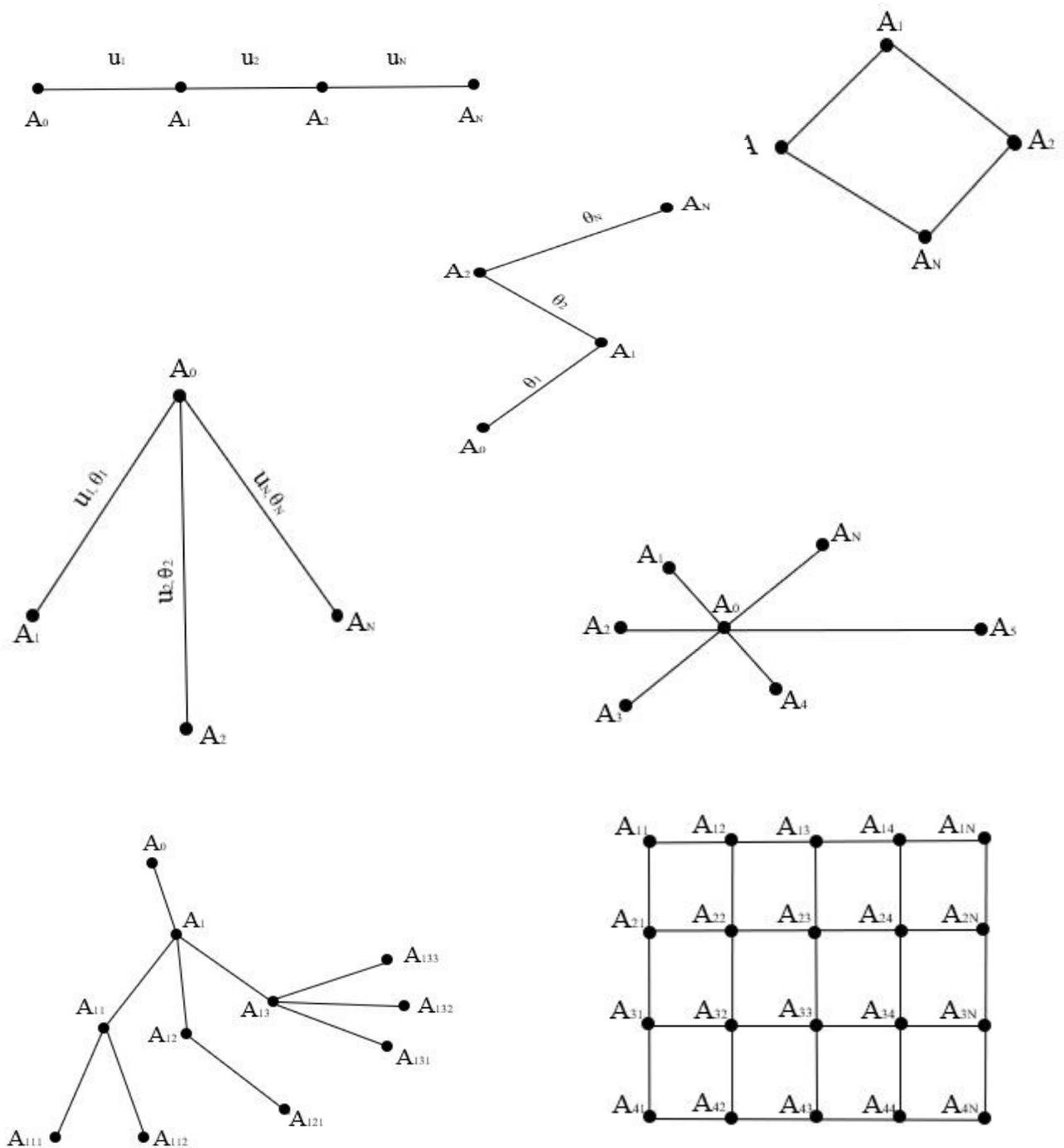


Рисунок 3.1 - Примеры линейных, звездных, сетевых и решеточных графов

Два ребра графа называются *смежными*, если у них есть общая вершина. Граф называется *линейным*, если ребра последовательно соединяются друг с другом ( $N$ -ребер,  $N-1$  вершин).

Линейный граф называется *замкнутым*, если последний элемент графа соединен с началом первого элемента. ( $N$ -ребер,  $N$  вершин).

Здесь мы рассмотрим краевые задачи на звездных тепловых, упругих и термоупругих графах. Вначале рассмотрим краевые задачи на тепловом графе.

### 3.1 Краевые задачи теплопроводности на звездном графе

Рассматривается неориентированный звездный тепловой граф из  $N$  ребер ( $A_0, A_j$ ) – отрезков длины  $L_j$  ( $j=1,2,\dots,N$ ) с общей вершиной  $A_0$  (Рис.3.1). На каждом отрезке  $A_j = [0, L_j]$  вводится своя система координат  $(x_j, t)$  с началом в узле  $A_0$ :  $x_j = 0$ , и функции состояния температуры  $\theta_j(x_j, t)$  которые удовлетворяют уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} - \kappa_j \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial x_j^2} = F_j(x_j, t), \quad (3.1)$$

где  $\kappa_j$  - коэффициент теплопроводности на  $j$ -ом ребре,  $F_j(x_j, t)$  – источник тепла на  $j$ -ом ребре ( $j = 1, 2, \dots, N$ ).

*Начальные условия* (условия Коши): при  $t=0$  известна температура графа:

$$\theta_j(x_j, 0) = \theta_0^j(x_j), \quad 0 \leq x_j \leq L_j, \quad t = 0, \quad (3.2)$$

$$\theta_0^j(0) = \theta_j(0, 0), \quad \forall j.$$

Здесь рассмотрим вначале следующую краевую задачу.

*Задача Дирихле.* Известны значения температур на  $N$  концах каждого ребра графа  $A_j$ :

$$\theta_j(L_j, t) = \theta_2^j(t) = T^j(t), \quad t \geq 0 \quad (j = \overline{1, N}). \quad (3.3)$$

В общем узле графа  $A_0$  заданы следующие условия непрерывности температуры и обобщенные условия Кирхгофа для тепловых потоков:

$$\theta_1^1(t) = \theta_1^2(t) = \dots = \theta_1^N(t), \quad t \geq 0, \quad (3.4)$$

$$\kappa_1 q_1^1(t) + \kappa_2 q_1^2(t) + \dots + \kappa_N q_1^N(t) = \sum_{j=1}^N \kappa_j q_1^j(t) = G(t). \quad (3.5)$$

Здесь и далее  $\theta_1^j(t) = \theta_j(0, t)$ ,  $q_1^j(t) = \left. \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right|_{x_j=0}$ ;  $T^j(t)$ ,  $G(t)$  – известные функции

из класса  $C[0; \infty)$ .

Требуется найти решение задачи Дирихле на этом тепловом звёздном графе.

### 3.2 Уравнения связи краевых функций на ребрах теплового графа

Рассмотрим температуру  $\theta_j(x_j, t)$  на ребре графа  $[0, L_j]$ , которая является решением уравнения теплопроводности (3.1).

Трансформанта Фурье функции Грина уравнения теплопроводности на  $j$ -ом ребре равна:

$$\bar{U}_2^j(x_j, \omega) = -\frac{\sin(k_j |x_j|)}{2k_j \kappa_j}, \quad k_j = \sqrt{i\omega \kappa_j^{-1}} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa_j}}. \quad (3.6)$$

Решение краевых задач теплопроводности на сегменте получено в Разделе. Используем его для решения тепловой задачи на графе.

Трансформанта температуры на ребре определяется формулой (2.29), которая для  $j$ -го ребра графа имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_j(x_j, \omega) = & \bar{F}_2^j(x_j, \omega) * \bar{U}_2^j(x_j, \omega) + \theta_0^j(x_j) H(L_j - x_j) H(x_j) * \bar{U}_2^j(x_j, \omega) + \\ & + \kappa_j \bar{q}_2(\omega) H(x_j) \bar{U}_2^j(L_j - x_j, \omega) - \kappa_j \bar{q}_1(\omega) H(L_j - x_j) \bar{U}_2^j(x_j, \omega) + \\ & + \kappa_j \bar{\theta}_2(\omega) H(x_j) \bar{U}_{2,x}^j(L_j - x_j, \omega) - \kappa_j \bar{\theta}_1(\omega) H(L_j - x_j) \bar{U}_{2,x}^j(x_j, \omega). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Далее используем уравнения связи температуры и тепловых потоков на концах ребер, которые получим, используя (2.30):

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{cc} 0,5 & 0 \\ \kappa_j \bar{U}_{2,x}^j(L_j, \omega) & \bar{U}_2^j(L_j, \omega) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\theta}_1^j(\omega) \\ \bar{q}_1^j(\omega) \end{array} \right\} + \\ & + \left\{ \begin{array}{cc} \kappa_j \bar{U}_{2,x}^j(L_j, \omega) & -\bar{U}_2^j(L_j, \omega) \\ 0,5 & 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\theta}_2^j(\omega) \\ \bar{q}_2^j(\omega) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{Q}^j(0, \omega) \\ \bar{Q}^j(L, \omega) \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь правые части определены начальными условиями и действующими тепловыми источниками на  $j$ -ом ребре:

$$\bar{Q}^j(x_j, \omega) = \left| \bar{F}_2^j(x_j, \omega) * \bar{U}_2^j(x_j, \omega) - \kappa_j^{-1} \theta_0^j(x) H(L_j - x) H(x) * \bar{U}_2^j(x_j, \omega) \right|. \quad (3.9)$$

Для построения разрешающей системы уравнений теплового звездного графа представим уравнение (3.8) в следующем матричном виде

$$\mathbf{A}2^j(\omega) \times \mathbf{B}2^j(\omega) = \mathbf{C}2^j(\omega), \quad (3.10)$$

$$\mathbf{A2}_j = \begin{Bmatrix} 0,5 & 0 & \kappa_j \bar{U}_{2,x}^j(L_j, \omega) & -\bar{U}_2^j(L_j, \omega) \\ \kappa_j \bar{U}_{2,x}^j(L_j, \omega) & \bar{U}_2^j(L_j, \omega) & 0,5 & 0 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{B2}^j(\omega) = \begin{pmatrix} \bar{w}_1^j(\omega) \\ \bar{p}_1^j(\omega) \\ \bar{w}_2^j(\omega) \\ \bar{p}_2^j(\omega) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C1}^j(\omega) = \begin{pmatrix} \bar{P}_j(0, \omega) \\ \bar{P}_j(L_j, \omega) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Перейдём к построению разрешающей системы уравнений для определения неизвестных граничных функций на звездном графе.

### 3.3 Решение задачи Дирихле на тепловом звездном графе

На каждом ребре  $L_j$  графа имеем систему  $2N$  линейных алгебраических уравнений для определения четырех краевых функции:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\cos(k_j L_j)}{\kappa_j} & \frac{\sin(k_j L_j)}{\kappa_j k_j} \\ -\frac{\cos(k_j L_j)}{\kappa_j} & -\frac{\sin(k_j L_j)}{k_j \kappa_j} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\theta}_1^j(\omega) \\ \bar{q}_1^j(\omega) \\ \bar{\theta}_2^j(\omega) \\ \bar{q}_2^j(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F}_1^j(\omega) \\ \bar{F}_2^j(\omega) \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

где  $k_j(\omega) = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa_j}}$ ,  $j$  – номер соответствующего ребра графа, а

$$\bar{F}_1^j(\omega) = 2\bar{Q}^j(0, \omega), \quad \bar{F}_2^j(\omega) = 2\bar{Q}^j(L_j, \omega). \quad (3.13)$$

Далее, с учетом условий Дирихле на конце графа (3.3), добавляются  $N$ –уравнений для определения  $4N$  граничных функций на ребрах графа. Условия трансмиссии (3.4), (3.5) в узле графа дают еще  $N$  уравнений для определения  $\mathbf{B2}(\omega) = (\bar{\theta}_1^1, \bar{q}_1^1, \bar{\theta}_2^1, \bar{q}_2^1; \dots \dots \bar{\theta}_1^N, \bar{q}_1^N, \bar{\theta}_2^N, \bar{q}_1^N)$ .

Итак, имеем полную систему из  $4N$  линейных уравнений для определения этих функций. Запишем эту систему в матричном виде.

Теорема 3.1 *Разрешающая система уравнений краевой задачи Дирихле (3.1) – (3.5) на тепловом звездном графе с  $N$  ребрами имеет вид:*

$$\mathbf{A2}(\omega) \cdot \mathbf{B2}(\omega) = \mathbf{F}(\omega). \quad (3.14)$$

где

$$\mathbf{F}(\omega) = \left\{ \bar{F}_1^1, \bar{F}_2^1; \dots; \bar{F}_1^N, \bar{F}_2^N; \bar{T}^1, \dots, \bar{T}^N; \underbrace{0, \dots, 0}_{N-1}; \bar{G}(\omega) \right\},$$

$$\mathbf{A2}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\cos(k_1 L_1)}{\kappa_1} & \frac{\sin(k_1 L_1)}{\kappa_1 k_1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\cos(k_1 L_1)}{\kappa_1} & -\frac{\sin(k_1 L_1)}{\kappa_1 k_1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -\frac{\cos(k_N L_N)}{\kappa_N} & \frac{\sin(k_N L_N)}{\kappa_N k_N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\cos(k_N L_N)}{\kappa_N} & -\frac{\sin(k_N L_N)}{\kappa_N k_N} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \kappa_N & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Ее решение равно

$$\mathbf{B2}(\omega) = \mathbf{A2}^{-1} \times \mathbf{F2}(\omega)$$

Здесь матрицы имеют следующие размерности  $[\mathbf{A2}]_{4N \times 4N}$ ,  $[\mathbf{B2}(\omega)]_{4N \times 1}$ ,  $[\mathbf{F2}(\omega)]_{4N \times 1}$ .

В первых  $2N$  строках вдоль диагонали стоят матрицы  $\mathbf{A2}_j$  связи для каждого ребра этого графа. Остальные элементы нулевые.

В следующих  $N-1$  строках матрицы  $\mathbf{A}$  записаны условия непрерывности (3.4).

В последней строке матрицы стоит условие Кирхгофа в узле графа  $\mathbf{A}_0$  (3.5). После определения неизвестных краевых и узловых функций  $\mathbf{B2}(\omega)$ , по формулам (3.7) определяем температуру на любом ребре графа.

Приведем пример построения решения для двухзвенного теплового графа.

### 3.4 Задача Дирихле на двухзвенном тепловом графе

В качестве примера рассмотрим двухзвенный тепловой граф, который состоит из двух стержней с разным коэффициентом теплопроводности. Заметим, что вопросы корректности краевых задач уравнений теплопроводности с разрывными коэффициентами рассматривали ранее Самарский А.А. [69],

Камынин Л.И. [70, 71]. В работе [72] рассматривалась краевая задача уравнений теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности и условием непрерывности тепловых потоков в одной точке разрыва, для решения которой использовался метод разделения переменных. Однако решение не было построено.

Здесь рассмотрим преобразование Фурье по времени этой задачи, в которой описывает стационарные колебания с заданной частотой. Тогда, на основании формулы (3.23), для каждого отрезка (ребра) графа можно выписать разрешающие уравнения по отдельности.

На первом отрезке  $L_1$  графа получим соотношение:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos(k_1 L_1) & k_1^{-1} \sin(k_1 L_1) \\ -\cos(k_1 L_1) & -k_1^{-1} \sin(k_1 L_1) & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^1(\omega) \\ \bar{q}_1^1(\omega) \\ \bar{\theta}_2^1(\omega) \\ \bar{q}_2^1(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1^1(\omega) \\ \bar{F}_2^1(\omega) \end{bmatrix},$$

На втором отрезке  $L_2$  графа имеем:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos(k_2 L_2) & k_2^{-1} \sin(k_2 L_2) \\ -\cos(k_2 L_2) & -k_2^{-1} \sin(k_2 L_2) & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^2(\omega) \\ \bar{q}_1^2(\omega) \\ \bar{\theta}_2^2(\omega) \\ \bar{q}_2^2(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1^2(\omega) \\ \bar{F}_2^2(\omega) \end{bmatrix}.$$

В случае краевой задачи Дирихле, когда известны температура на концах веток  $(\theta_1^1, \theta_2^2)$ :

$$\begin{cases} \theta_1^1(t) = \theta_1^2(t) \\ \kappa_1 q_1^1 + \kappa_2 q_1^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_2^1(L_1, t) = \theta_2^1(t) \\ \theta_2^2(L_2, t) = \theta_2^2(t) \end{cases}$$

Разрешающая система уравнений трансформант задач теплопроводности на графе с двумя отрезками имеет вид:

$$\mathbf{A}(\omega) \times \mathbf{B}(\omega) = \mathbf{F}(\omega), \quad (3.15)$$

где

$$\mathbf{A}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos(k_1 L_1) & \frac{\sin(k_1 L_1)}{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(k_1 L_1) & \frac{-\sin(k_1 L_1)}{k_1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\cos(k_2 L_2) & \frac{\sin(k_2 L_2)}{k_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(k_2 L_2) & \frac{\sin(k_2 L_2)}{k_2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & 0 & \kappa_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Решение системы (3.15) найдем по формуле матричного метода:

$$\mathbf{B}(\omega) = \mathbf{A}^{-1}(\omega) \times \mathbf{F}(\omega). \quad (3.16)$$

Из этой системы можно вычислить следующие неизвестные граничные тепловые потоки  $(\bar{q}_1^1(\omega), \bar{q}_1^2(\omega))$  в общем узле  $A_0$  и на концах двух веток  $(\bar{q}_2^1(\omega), \bar{q}_2^2(\omega))$ .

С помощью символьных вычислений в MatLab получены граничные функции, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1^1(\omega) &= \frac{\bar{F}_2^2(\omega)\kappa_2 \sin(L_1 k_1) + \bar{F}_2^1(\omega)\kappa_1 \sin(L_2 k_2)}{\kappa_1 \cos(L_1 k_1) \sin(L_2 k_2) + \kappa_2 \cos(L_2 k_2) \sin(L_1 k_1)} - \\ &\quad - \frac{\bar{\theta}_2^1(\omega)\kappa_1 \sin(L_2 k_2) + \bar{\theta}_2^2(\omega)\kappa_2 \sin(L_1 k_1)}{\kappa_1 \cos(L_1 k) \sin(L_2 k) + \kappa_2 \cos(L_2 k) \sin(L_1 k)}, \\ q_1^1(\omega) &= -\frac{\bar{F}_2^1(\omega)k\kappa_2 \cos(L_2 k) - \bar{F}_2^2(\omega)k\kappa_2 \cos(L_1 k)}{\kappa_1 \cos(L_1 k) \sin(L_2 k) + \kappa_2 \cos(L_2 k) \sin(L_1 k)} + \\ &\quad + \frac{\bar{\theta}_2^1(\omega)k\kappa_2 \cos(L_2 k) - \bar{\theta}_2^2(\omega)k\kappa_2 \cos(L_1 k)}{\kappa_1 \cos(L_1 k) \sin(L_2 k) + \kappa_2 \cos(L_2 k) \sin(L_1 k)}, \end{aligned}$$

$$\bar{\theta}_2^1(\omega) = \bar{\theta}_2^1(\omega) - \text{известная граничная функция,}$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_2^1(\omega) = & \frac{\bar{\theta}_2^1(\omega)(k\kappa_1 \cos^2(L_1k)\sin(L_2k) - k\kappa_1 \sin(L_2k) + k\kappa_2 \cos(L_1k)\cos(L_2k)\sin(L_1k))}{\sin(L_1k)(\kappa_1 \cos(L_1k)\sin(L_2k) + \kappa_2 \cos(L_2k)\sin(L_1k))} + \\ & + \frac{\bar{F}_1^1(\omega)k\kappa_1 \cos(L_1k)\sin(L_2k) + \bar{F}_1^1(\omega)k\kappa_2 \cos(L_2k)\sin(L_1k)}{\sin(L_1k)(\kappa_1 \cos(L_1k)\sin(L_2k) + \kappa_2 \cos(L_2k)\sin(L_1k))} + \\ & + \frac{\bar{F}_2^2(\omega)k\kappa_2 \sin(L_1k) - \bar{\theta}_2^2(\omega)k\kappa \sin(L_1k)}{\sin(L_1k)(\kappa_1 \cos(L_1k)\sin(L_2k) + \kappa_2 \cos(L_2k)\sin(L_1k))} + \\ & + \frac{\bar{F}_2^1(\omega)k\kappa_1 \sin(L_2k)}{\sin(L_1k)(\kappa_1 \cos(L_1k)\sin(L_2k) + \kappa_2 \cos(L_2k)\sin(L_1k))}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1^2(\omega) = & \frac{\bar{F}_2^2(\omega)\kappa_2 \sin(L_1k) + \bar{F}_2^1(\omega)\kappa_1 \sin(L_2k)}{\kappa_1 \cos(L_1k)\sin(L_2k) + \kappa_2 \cos(L_2k)\sin(L_1k)} - \\ & - \frac{\bar{\theta}_2^1(\omega)\kappa_1 \sin(L_2k) + \bar{\theta}_2^2(\omega)\kappa_2 \sin(L_1k)}{\kappa_1 \cos(L_1k)\sin(L_2k) + \kappa_2 \cos(L_2k)\sin(L_1k)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1^2(\omega) = & \frac{\bar{F}_2^1(\omega)k\kappa_1 \cos(L_2k) - \bar{F}_2^2(\omega)k\kappa_1 \cos(L_1k)}{\kappa_1 \cos(L_1k)\sin(L_2k) + \kappa_2 \cos(L_2k)\sin(L_1k)} - \\ & - \frac{\bar{\theta}_2^1(\omega)k\kappa_1 \cos(L_2k) - \bar{\theta}_2^2(\omega)k\kappa_1 \cos(L_1k)}{\kappa_1 \cos(L_1k)\sin(L_2k) + \kappa_2 \cos(L_2k)\sin(L_1k)}, \end{aligned}$$

$\bar{\theta}_2^j(\omega)$  - известные граничные функции,

$$\begin{aligned} \bar{q}_2^2(\omega) = & \frac{k\kappa_1\bar{\theta}_2^1(\omega)\sin(L_2k) - k\kappa_1\bar{F}_2^1(\omega)\sin(L_2k)}{(\kappa_1 \cos(L_1k)\sin(L_2k) + \kappa_2 \cos(L_2k)\sin(L_1k))\sin(L_2k)} - \\ & - \frac{k\kappa_1\bar{F}_1^2(\omega)\cos(L_1k)\sin(L_2k) + k\kappa_2\bar{F}_1^2(\omega)\cos(L_2k)\sin(L_1k)}{(\kappa_1 \cos(L_1k)\sin(L_2k) + \kappa_2 \cos(L_2k)\sin(L_1k))\sin(L_2k)} + \\ & - \frac{\bar{\theta}_2^2(\omega)(k\kappa_2 \sin(L_1k)\cos^2(L_2k) - k\kappa_2 \sin(L_1k) + k\kappa_1 \cos(L_1k)\cos(L_2k)\sin(L_2k))}{(\kappa_1 \cos(L_1k)\sin(L_2k) + \kappa_2 \cos(L_2k)\sin(L_1k))\sin(L_2k)} - \\ & - \frac{k\kappa_2\bar{F}_2^2(\omega)\sin(L_1k)}{(\kappa_1 \cos(L_1k)\sin(L_2k) + \kappa_2 \cos(L_2k)\sin(L_1k))\sin(L_2k)}. \end{aligned}$$

Из полученных результатов температур и тепловых потоков, мы видим, что температуры  $\bar{\theta}_1^1(\omega) = \bar{\theta}_1^2(\omega)$  в общем узле (в вершине) данного графа одинаковы. А сумма тепловых потоков в этом узле (при вершине) обращается в ноль, что соответствует условию Кирхгофа (3.5).

Таким образом, найдены все граничные функции для двух отрезков данного графа. Аналитическое решение задачи построено и имеет вид

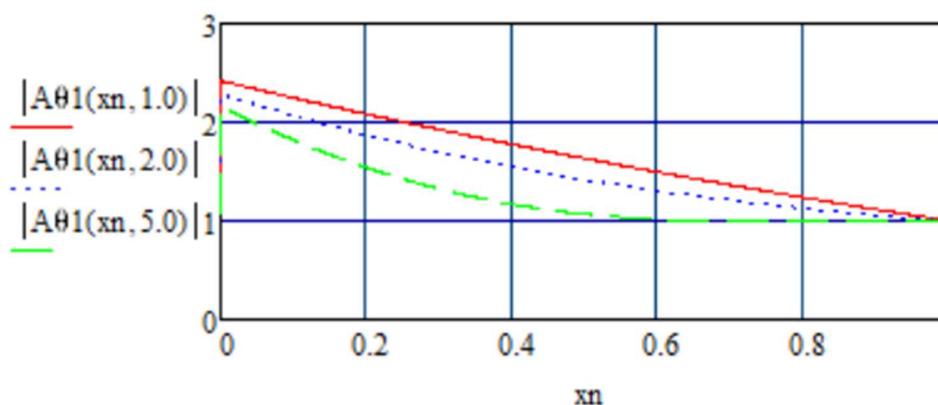
$$\theta_j(x_j, t) = \left\{ \kappa_j q_2(\omega) H(x_j) U_2^j(L_j - x_j, \omega) \right\} - \kappa_j q_1(\omega) H(L_j - x_j) U_2^j(x_j, \omega) + \kappa_j \theta_2(\omega) H(x_j) U_{2,x}^j(L_j - x_j, \omega) - \kappa_j \theta_1(\omega) H(L_j - x_j) U_{2,x}^j(x_j, \omega) \left\} e^{-i\omega t}. \quad (3.17)$$

$$U_2^j(x_j, \omega) = -\frac{\sin(k_j |x_j|)}{2k_j \kappa_j}, \quad k_j = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa_j}}, \quad j=1,2.$$

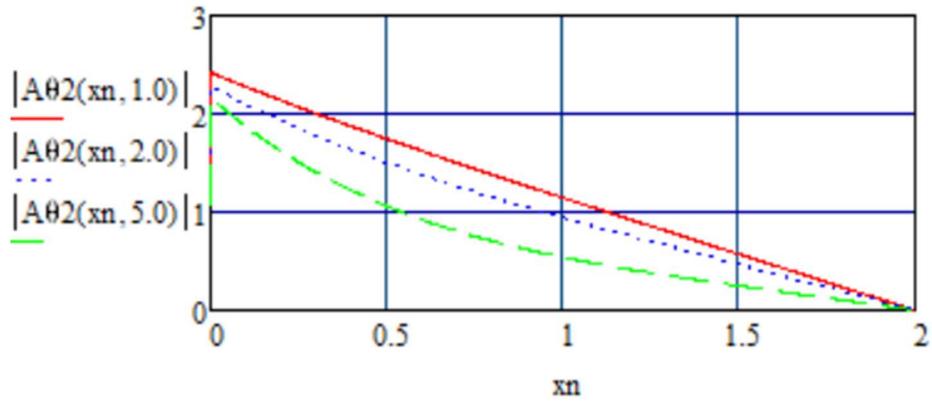
### 3.4.1 Численное решение и анализ стационарных задачи Дирихле на двухзвенном тепловом графе

Составлена программа решения поставленных краевых задач в системе MatCad-15 для двухзвенного звездного графа и проведены численные эксперименты по расчету теплового состояния графа при периодических колебаниях температуры и тепловых потоков на его концах (3.15), (3.17). Ниже представлены результаты расчета задачи Дирихле на двухзвенном тепловом графе.

На рис 3.1 представлен график амплитуд колебаний температуры стержня 1 (а) и стержня 2 (б) при разной частоте колебаний температуры на конце первого стержня с амплитудой  $A_1=1$ . Температура на втором конце стержня постоянна:  $A_2=0$ . Безразмерные параметры стержней 1 и 2 :  $L_2=2L_1$ ,  $\kappa_2 = 1.2\kappa_1$



а

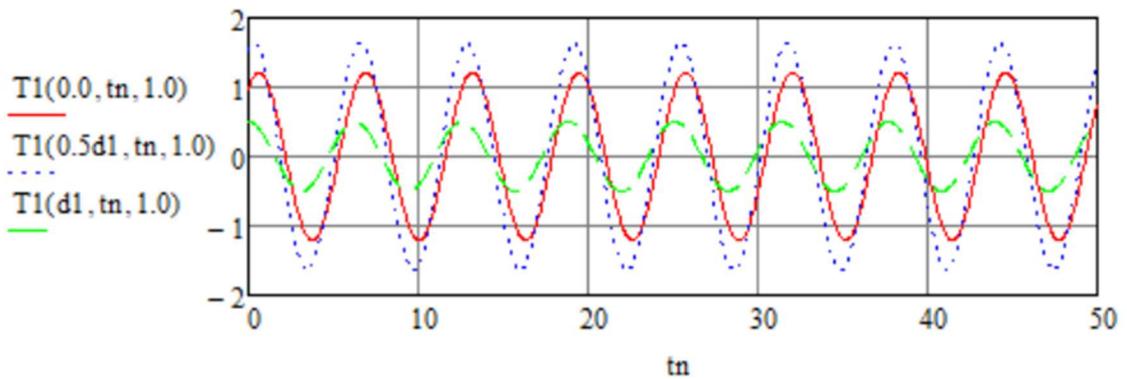


б

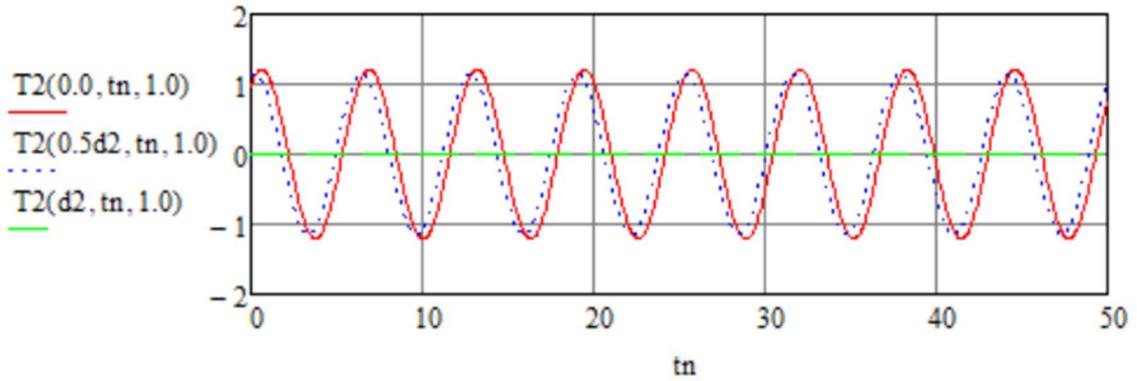
Рис 3.1 – Амплитуда колебаний температуры стержня 1 (а) и стержня 2 (б) при разной частоте колебаний температуры на конце первого стержня

На рисунке 3.2 представлены графики колебаний температуры в фиксированных точках стержня 1 и стержня 2 при частоте  $\omega = 1$ :  $x_1 = 0.0, 0.5L_1, L_1$  (а);  $x_2 = 0.0, 0.5L_2, L_2$  (б).

Разработанная программа позволяет варьировать геометрические и тепловые характеристики графа, рассчитывать его температуру в любой момент времени в любой точке графа при различных краевых условиях на его концах.



а



б

Рис 3.2 – Колебания температуры в фиксированных точках стержня 1 (а) и стержня 2 (б):  $\omega = 1$

### 3.5 Краевые задачи на упругом звездном графе и их решения

Рассматривается такой же упругий звездный граф из  $N$  ребер  $(A_0, A_j)$  – отрезков длины  $L_j$  ( $j=1,2,\dots,N$ ) с общей вершиной  $A_0$  (Рис.3.1). Также на каждом отрезке  $\Lambda_j = [0, L_j]$  вводится своя система координат  $(x_j, t)$  с началом в узле  $A_0$ :  $x_j = 0$ , и функции перемещении сечений стержня  $u_j(x_j, t)$ , которые удовлетворяют волновому уравнению Даламбера:

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - c_j^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} = F_j(x_j, t), \quad (3.17)$$

где  $c_j$  - скорость распространения упругих волн на  $j$ -ом ребре,  $F_j(x_j, t)$  – действующие продольные силы на  $j$ -ом ребре ( $j=1,2,\dots,N$ ).

*Начальные условия* (условия Коши): при  $t=0$  известны перемещения и скорости:

$$\begin{aligned} u_j(x_j, 0) &= u_0^j(x_j), & u_0^j(0) &= u^j(0,0), \\ \partial_t u_j(x_j, 0) &= v_0^j(x_j), & v_0^j(0) &= \partial_t u_j(0,0), \quad 0 \leq x_j \leq L_j, \quad t=0, \quad \forall j. \end{aligned} \quad (3.18)$$

*Задача Дирихле.* Известны значения перемещения конца каждого ребра графа  $A_j$ :

$$\begin{aligned} u_j(L_j, t) &\triangleq \overline{w_2^j(t)} = \Lambda_j(t), \quad x_j = L_j, \quad t \geq 0 \quad (j=1, N). \\ \Lambda_j(t) &\in C(R_+) \cap L_1(R_+), \quad R_+ = [0, \infty).. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В узле графа  $A_0$  заданы следующие условия непрерывности перемещений и обобщенные условия Кирхгофа:

$$u_1(0,t) = u_j(0,t), \quad t \geq 0, \quad j = 2, \dots, N-1, \quad (3.20)$$

$$d_1 p_1^1(t) + d_2 p_1^2(t) + \dots + d_N p_1^N(t) = \sum_{j=1}^N d_j p_1^j(t) = P(t), \quad (3.21)$$

$$w_1^j(t) = u_1^j(0,t), \quad p_1^j(t) = \left. \frac{\partial u^j}{\partial x_j} \right|_{x_j=0}, \quad P(t) - \text{известная функция из класса } L_1[0, \infty),$$

$$w_2^j(t) = u_j(L_j, t), \quad \text{коэффициенты } d_j \text{ известны.}$$

Требуется найти решение задачи Дирихле на этом графе.

### 3.6 Уравнения связи краевых функций на ребрах упругого графа

Рассмотрим перемещение  $u_j(x,t)$  на отрезке  $[0, L_j]$  - решение волнового уравнения (3.17).

Трансформанта Фурье функции Грина волнового уравнения на  $j$ -ом ребре равна:

$$\bar{U}_1^j(x_j, \omega) = -\frac{\sin(k_j |x_j|)}{2c_j k_j}, \quad \bar{U}_{1,x}^j(x_j, \omega) = -\frac{1}{2c_j} \cos(k_j |x_j|) \operatorname{sgn}(x_j). \quad (3.22)$$

Решение краевых задач упругости получено в Разделе 2 (см.2.8). Трансформанта перемещений на ребре определяется формулой (2.41), которая в системе координат для  $j$ -го ребра графа имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}_j(x_j, \omega) H(L_j - x_j) H(x_j) = \bar{P}^j(x_j, \omega) + \\ + c_j^2 \left\{ (\bar{p}_1(\omega)) H(L_j - x_j) \bar{U}_1^j(x_j, \omega) - \bar{w}_1(\omega) H(L_j - x_j) \bar{U}_{1,x}^j(x_j, \omega) \right\} + \\ - c_j^2 \left\{ (\bar{p}_2(\omega)) H(x_j) \bar{U}_1^j(L_j - x_j, \omega) - \bar{w}_2(\omega) H(x_j) \bar{U}_{1,x}^j(x_j - L_j, \omega) \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Здесь используем уравнения связи перемещений и напряжений на концах ребер (2.42). В системе координат на ребре они примут вид

$$\begin{Bmatrix} 0,5 & 0 \\ \bar{U}_{1,x}^j(L, \omega) & \bar{U}_1^j(L, \omega) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1^j(\omega) \\ \bar{p}_1^j(\omega) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{U}_{1,x}^j(L, \omega) & -\bar{U}_1^j(L, \omega) \\ 0,5 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_2^j(\omega) \\ \bar{p}_2^j(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_j(0, \omega) \\ P_j(L, \omega) \end{Bmatrix}, \quad (3.24)$$

где правые части определены начальными условиями и действующими силовыми источниками на  $j$ -ом ребре:

$$\bar{P}_j(x, \omega) = \bar{F}^j(x, \omega) *_{x} \bar{U}_1^j(x, \omega) + \left\{ (\dot{u}_0(x) - i\omega u_0(x)) H(x) H(L-x) \right\} *_{x} \bar{U}_1^j(x, \omega),$$

где  $j$  – номер соответствующего ребра графа.

Для построения разрешающей системы уравнений звездного упругого графа представим уравнение (3.22) в следующем виде

$$\mathbf{A}1^j(\omega) \times \mathbf{B}1^j(\omega) = \mathbf{C}1^j(\omega), \quad (3.25)$$

$$\mathbf{A}1^j(\omega) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & -\cos(\lambda_j L_j) & \frac{\sin(\lambda_j L_j)}{\lambda_j(\omega)} \\ -\cos(\lambda_j L_j) & \frac{\sin(\lambda_j L_j)}{\lambda_j(\omega)} & 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_j = \frac{\omega}{c_j},$$

$$\mathbf{B}1^j(\omega) = (\bar{w}_1^j(\omega), \bar{p}_1^j(\omega), \bar{w}_2^j(\omega), \bar{p}_2^j(\omega)), \quad (3.26)$$

$$\mathbf{C}1^j(\omega) = 2(\bar{P}_j(0, \omega), \bar{P}_j(L_j, \omega)).$$

Матричное уравнение (3.25) связывает четыре краевые функции, которые неизвестны. Для их определения построим разрешающую систему уравнений на упругом звездном графе.

### 3.7 Решение задачи Дирихле на упругом звездном графе

Теперь вернемся к рассмотрению задачи Дирихле для волнового уравнения на звездном графе (Рис.3.2).

На каждом отрезке  $\Lambda_j$  графа имеем систему из двух линейных алгебраических уравнений для определения четырех краевых функции:

$$\mathbf{A}1^j(\omega) \times \mathbf{B}1^j(\omega) = \mathbf{C}1^j(\omega), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.27)$$

Итак, имеем  $2N$  уравнений для определения  $4N$  неизвестных краевых функций.

У графа всего  $N$  ребер с одним краевым условием на конце каждого ребра. Следовательно, имеем еще  $N$  уравнений (3.19) для перемещений на концах графа.

Следующие  $N-1$  уравнение получим из условий непрерывности перемещений в узле (3.20), которые имеют вид:  $\bar{u}_j(0, \omega) = \bar{u}_j(0, \omega), \quad j = 2, \dots, N.$

Условие Кирхгофа в узле графа  $A_0$  (3.21) дает последнее уравнение для замыкания системы из  $4N$  уравнений для определения  $4N$  функций:

$$d_1 \bar{p}_1^1(\omega) + d_2 \bar{p}_1^2(\omega) + \dots + d_N \bar{p}_1^N(\omega) = \sum_{j=1}^N d_j \bar{p}_1^j(\omega) = \bar{P}(\omega).$$

Теорема 3.2. Разрешающая система уравнений краевой задачи Дирихле (3.18) – (3.21) на упругом звездном графе с  $N$  ребрами и ее решения имеют вид:

$$\mathbf{A}\mathbf{l}(\omega) \times \mathbf{B}\mathbf{l}(\omega) = \mathbf{\Gamma}(\omega),$$

(3.28)

$$\mathbf{B}\mathbf{l}(\omega) = \mathbf{A}\mathbf{l}^{-1}(\omega) \times \mathbf{\Gamma}(\omega),$$

где

$$\mathbf{A}\mathbf{l}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos(\lambda_1 L_1) & \frac{\sin(\lambda_1 L_1)}{\lambda_1(\omega)} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\lambda_1 L_1) & -\frac{\sin(\lambda_1 L_1)}{\lambda_1(\omega)} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -\cos(\lambda_N L_N) & \frac{\sin(\lambda_N L_N)}{\lambda_N(\omega)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\cos(\lambda_N L_N) & -\frac{\sin(\lambda_N L_N)}{\lambda_N(\omega)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_N & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{l}(\omega) = (\bar{w}_1^1(\omega), \bar{p}_1^1(\omega), \bar{w}_2^1(\omega), \bar{p}_2^1(\omega); \dots; \bar{w}_1^N(\omega), \bar{p}_1^N(\omega), \bar{w}_2^N(\omega), \bar{p}_2^N(\omega)),$$

$$\mathbf{\Gamma}(\omega) = \left\{ \underbrace{\mathbf{\Gamma}\mathbf{1}(\omega)}_{2N}; \underbrace{\bar{\Lambda}_1(\omega)\bar{\Lambda}_2(\omega), \dots, \bar{\Lambda}_N(\omega)}_N; \underbrace{0, \dots, 0}_{N-1}; \bar{P}(\omega) \right\},$$

$$\mathbf{\Gamma}(\omega) = \left( \underbrace{\mathbf{\Gamma}\mathbf{1}(\omega)}_{2N}; \dots; \bar{P}_N(0, \omega), \bar{P}_N(L_N, \omega) \right).$$

Здесь матрицы имеют следующие размерности  $[\mathbf{A}\mathbf{l}]_{4N \times 4N}$ ,  $[\mathbf{B}\mathbf{l}(\omega)]_{4N \times 1}$ ,  $[\mathbf{\Gamma}(\omega)]_{4N \times 1}$ .

Приведем пример построения решения для двухзвенного упругого графа.

### 3.8 Решение стационарных краевых задач на двухзвенном упругом графе

В качестве примера рассмотрим упругий граф, который состоит из двух стержней, на концах которого заданы краевые условия вида:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1(L_1, t) + \beta_1 \partial_x u_1(L_1, t) &= \Lambda_1(t), & t \geq 0, \\ \alpha_2 u_2(L_2, t) + \beta_2 \partial_x u_2(L_2, t) &= \Lambda_2(t), & t \geq 0. \end{aligned} \quad (j = 1, N). \quad (3.29)$$

Тогда, на основании формулы (3.26), для каждого ребра графа можно выписать разрешающие уравнения по отдельности.

На первом и втором стержне графа получим уравнения:

$$\mathbf{A}1^1(\omega) \times \mathbf{B}1^1(\omega) = \mathbf{C}1^1(\omega), \quad (3.30)$$

$$\mathbf{A}1^2(\omega) \times \mathbf{B}1^2(\omega) = \mathbf{C}1^2(\omega).$$

$$\mathbf{A}1^1(\omega) = \begin{Bmatrix} 0,5 & 0 & \bar{U}_{1,x}^1(L_1, \omega) & \bar{U}_1^1(L_1, \omega) \\ \bar{U}_{1,x}^1(L_1, \omega) & -\bar{U}_{1,x}^1(L_1, \omega) & 0,5 & 0 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{A}1^2(\omega) = \begin{Bmatrix} 0,5 & 0 & \bar{U}_{1,x}^2(L_1, \omega) & \bar{U}_1^2(L_1, \omega) \\ \bar{U}_{1,x}^2(L_1, \omega) & -\bar{U}_{1,x}^2(L_1, \omega) & 0,5 & 0 \end{Bmatrix},$$

Условия трансмиссии:

$$\bar{w}_1^1(\omega) - \bar{w}_2^1(\omega) = 0, \quad d_1 \bar{p}_1^1(\omega) + d_2 \bar{p}_1^2(\omega) = \bar{P}(\omega). \quad (3.31)$$

$$\mathbf{B}1^1(\omega) = (\bar{w}_1^1(\omega), \bar{p}_1^1(\omega), \bar{w}_2^1(\omega), \bar{p}_2^1(\omega)),$$

$$\mathbf{B}1^2(\omega) = (\bar{w}_1^2(\omega), \bar{p}_1^2(\omega), \bar{w}_2^2(\omega), \bar{p}_2^2(\omega)),$$

$$\mathbf{C}1^1(\omega) = (\bar{P}_1(0, \omega), \bar{P}_1(L_1, \omega)), \quad \mathbf{C}1^2(\omega) = (\bar{P}_2(0, \omega), \bar{P}_2(L_2, \omega)).$$

Итак, имеем 8 уравнений для определения 8 краевых функций.

$$\mathbf{B}(\omega) = (\bar{w}_1^1(\omega), \bar{p}_1^1(\omega), \bar{w}_2^1(\omega), \bar{p}_2^1(\omega), \bar{w}_1^2(\omega), \bar{p}_1^2(\omega), \bar{w}_2^2(\omega), \bar{p}_2^2(\omega)),$$

которую запишем в виде:

$$\mathbf{A}(\omega) \times \mathbf{B}(\omega) = \mathbf{F}(\omega), \quad (3.32)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & \bar{U}_{1,x}^1(L_1, \omega) & \bar{U}_1^1(L_1, \omega) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{U}_{1,x}^1(L_1, \omega) & -\bar{U}_1^1(L_1, \omega) & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & \bar{U}_{1,x}^2(L_2, \omega) & \bar{U}_1^2(L_2, \omega) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{U}_{1,x}^2(L_2, \omega) & -\bar{U}_1^2(L_2, \omega) & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Разрешая эту систему линейных алгебраических уравнений, получим решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\omega) &= \mathbf{A}^{-1}(\omega) \cdot \mathbf{F}(\omega), \\ \mathbf{F}(\omega) &= (C1^1(\omega), C1^2(\omega), \Lambda_1(t), \Lambda_2(t), 0, P(\omega)). \end{aligned} \quad (3.33)$$

После определения  $\mathbf{B}(\omega)$ , перемещение стержней вычисляем, используя формулы (3.23), где все крайние функций известны (3.24).

$$\begin{aligned} u_j(x_j, \omega) H(L_j - x_j) H(x_j) &= P^j(x_j, \omega) + \\ + c_j^2 \{ (p_1(\omega)) H(L_j - x_j) U_1^j(x_j, \omega) - w_1(\omega) H(L_j - x_j) U_{1,x}^j(x_j, \omega) \} &+ \\ - c_j^2 \{ (p_2(\omega)) H(x_j) U_1^j(L_j - x_j, \omega) - w_2(\omega) H(x_j) U_{1,x}^j(x_j - L_j, \omega) \}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$U_1^j(x_j, \omega) = -\frac{\sin(k_j |x_j|)}{2\omega}, \quad U_{1,x}^j(x_j, \omega) = -\frac{1}{2c_j} \cos(k_j |x_j|) \operatorname{sgn}(x_j), \quad j=1,2.$$

Краевая задача решена.

### 3.9 Решение и анализ стационарной краевой задачи Неймана-Дирихле на двухзвенном упругом графе

Составлена программа решения поставленных краевых задач в системе MatCad-15 для двухзвенного звездного упругого графа и проведены численные эксперименты по расчету перемещений и напряжений звеньев графа при периодических колебаниях перемещений и напряжений на его концах (3.32), (3.33). Ниже представлены результаты расчета задачи Неймана-Дирихле на двухзвенном упругом графе. На конце первого звена ( $d_1 = 1, \tilde{c}_1 = 1$ ) действует периодическая нагрузка с частотой  $\omega$ , правый конец второго звена ( $d_2 = 2, \tilde{c}_2 = 0.8\tilde{c}_1$ ) неподвижен:

$$\sigma_1(L_1, t) = A1 \cdot e^{-i\omega t}, \quad u_2(L_2, t) = 0,$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad E_1 p_1^1(t) - E_2 p_1^2(t) = 0.$$

На рис 3.3 представлен график амплитуд колебаний перемещений стержня 1 (а) и стержня 2 (б) при разной частоте колебаний напряжений на конце первого стержня с амплитудой  $A1=1$ . Перемещение конца второго стержня равно нулю.

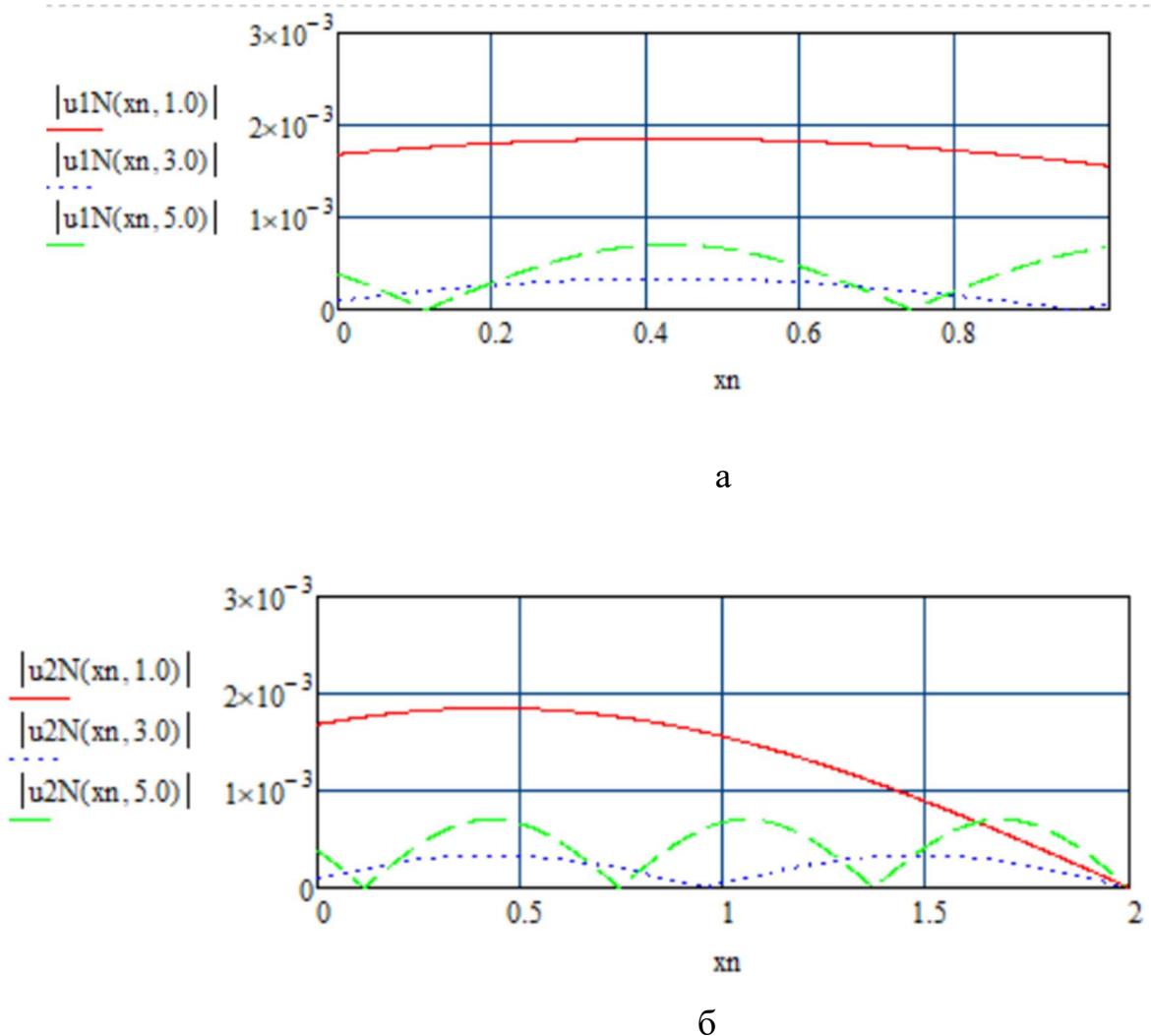
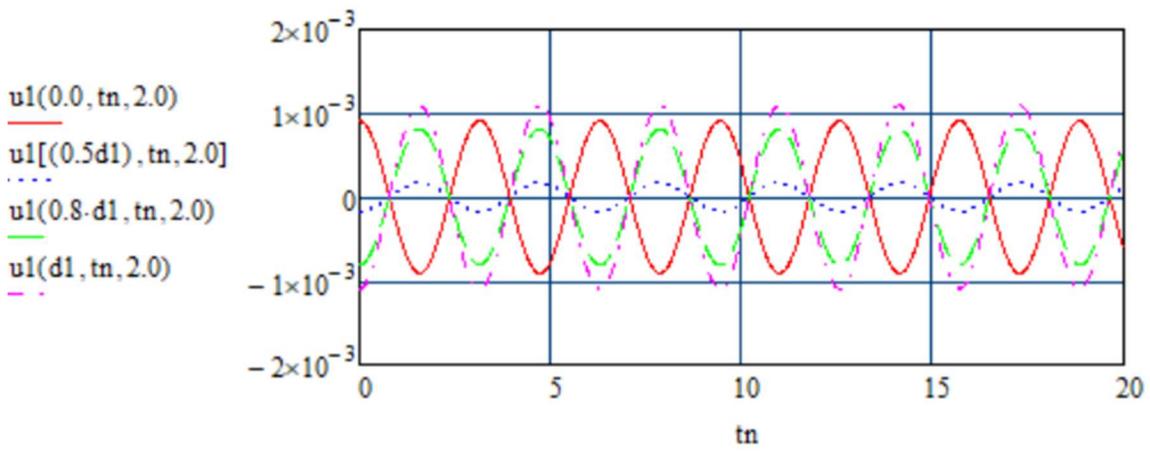
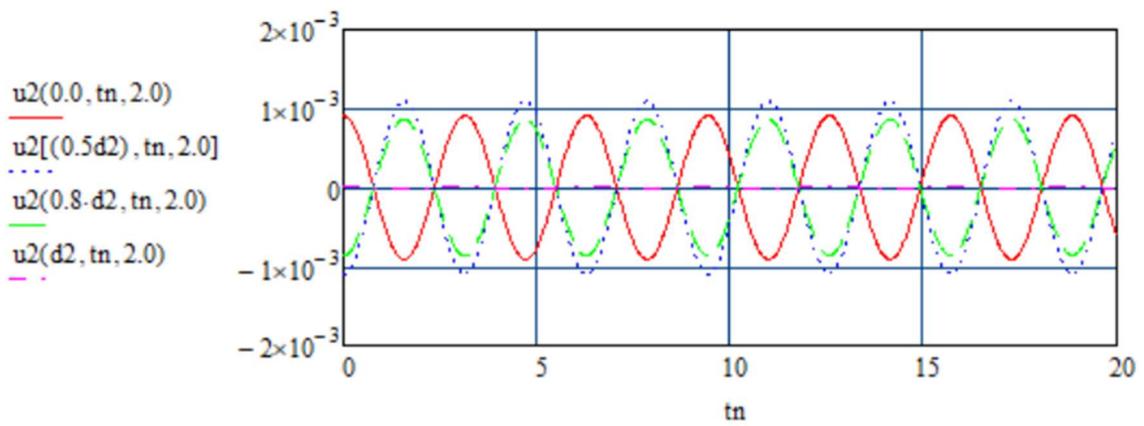


Рис 3.3 – Амплитуда колебаний перемещений стержня 1 (а) и стержня 2 (б) при разной частоте колебаний напряжений на конце первого стержня:  $\omega = 1, 3, 5$ .



а



б

Рис 3.4–Перемещения фиксированных точек стержня 1 (а), и стержня 2 (б):  $x_j / L_j = 0, 0.5, 0.8, 1.0$ ;  $\omega = 2$

На рисунке 3.4 представлены графики перемещений фиксированных точек стержня 1 и стержня 2 с течением времени  $t [1/T]$ ,  $T = L_1 / c_1$ .

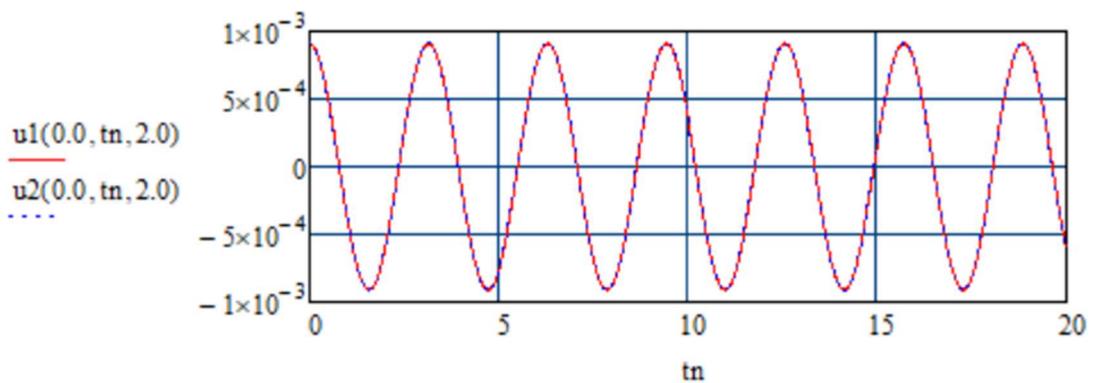


Рис 3.5 – Колебания узловой точки упругого графа с течением времени

Графики на рисунке 3.5 показывают достоверность построенных решений. Перемещение в узловой точке совпадают, конец второго звена графа неподвижен (см. рис 3.3).

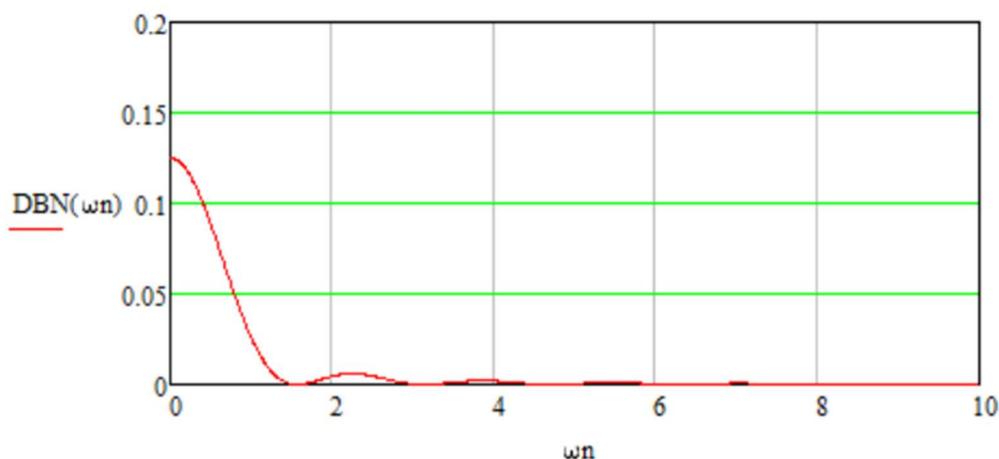


Рис 3.6 - Модуль определителя матрицы  $A(\omega)$  двухзвенного упругого графа

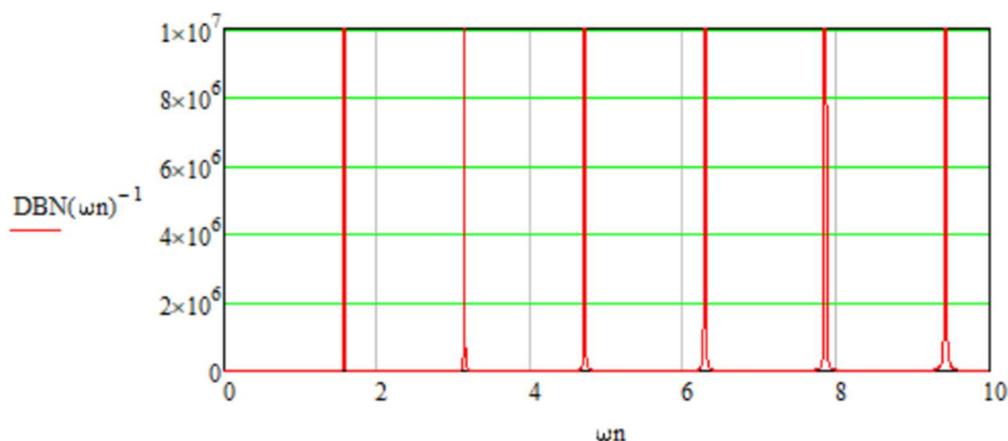


Рис 3.7 - Спектр резонансных частот двухзвенного графа

На рис 3.6 представлен график детерминанта матрицы  $A(\omega)$  разрешающей системы уравнений (3.32) в зависимости от частоты. Нули этого детерминанта определяет спектр свободных колебаний упругого графа, резонансных частот при внешних периодических воздействиях.

### 3.9 Краевые задачи на термоупругом звездном графе и их решения

Рассматривается звездный граф из  $N$  термоупругих стержней  $(A_0, A_j)$  длины  $L_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) с общей вершиной  $A_0$  (Рис.3.1).

Перемещения и температура  $j$ -го стержня описывается системой уравнений термоупругости:

$$\begin{aligned}
c_j^{-2} \partial_t^2 u_j - \partial_x^2 u_j + \tilde{\gamma}_j \partial_x \theta_j &= \tilde{F}_1^j, \\
\kappa_j \partial_x^2 \theta_j - \partial_t \theta_j + F_2^j &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.34}$$

где  $\tilde{\gamma}_j = \gamma_j / E_j$ ,  $\tilde{F}_1^j = F_1^j(x, t) / E_j$ . Здесь  $F_1^j(x, t)$  - продольные силы, действующие на  $j$  стержень,  $F_2^j$  - мощность тепловых источников на нем.

*Начальные условия* (условия Коши): при  $t=0$  известны перемещения и скорости и температура стержней:

$$\begin{aligned}
u_j(x_j, 0) &= u_0^j(x_j), & u_0^j(0) &= u^j(0, 0), \\
\partial_t u_j(x_j, 0) &= v_0^j(x_j), & v_0^j(0) &= \partial_t u_j(0, 0), \\
\theta_j(x_j, 0) &= \theta_0^j(x_j), & 0 \leq x_j \leq L_j, & \theta_0^j(0) = \theta^j(0, 0), \quad \forall j.
\end{aligned}
\tag{3.35}$$

*Условия Дирихле.* Известны значения перемещений и температуры на концах каждого ребра графа  $A_j$ :

$$u_j(L_j, t) \triangleq w_2^j(t) = \Lambda_j(t), \quad \theta_j(L_j, t) = \theta_2^j(t) = T^j(t), \quad t \geq 0, \quad j = \overline{1, N}. \tag{3.36}$$

$$\Lambda_j(t) \in C(R_+) \cap L_1(R_+), \quad R_+ = [0, \infty).$$

В узле графа  $A_0$  заданы следующие условия трансмиссии: (непрерывность перемещений и температуры)

$$u_1(0, t) = u_j(0, t), \quad \theta_1(0, t) = \theta_j(0, t), \quad t \geq 0, \quad j = 2, \dots, N-1 \tag{3.37}$$

(условия на суммарные напряжения и тепловые потоки в узле)

$$\begin{aligned}
d_1 p_1^1(t) + d_2 p_1^2(t) + \dots + d_N p_1^N(t) &= \sum_{j=1}^N d_j p_1^j(t) = P(t), \\
\kappa_1 q_1^1(0, t) + \kappa_2 q_1^2(0, t) + \dots + \kappa_N q_1^N(0, t) &= \sum_{j=1}^N \kappa_j q_1^j(0, t) = G(x, t),
\end{aligned}
\tag{3.38}$$

$T^j(t)$ ,  $G(x, t)$  – известные функции из класса  $C[0; \infty)$ .

Требуется найти решение краевой задачи на этом звёздном графе. Задачу решаем в три этапа.

**1 этап.** Решение тепловой задачи на звездном графе, определение температуры и тепловых потоков на концах стержней

$$\mathbf{B2}(\omega) = \left( \bar{\theta}_1^1, \bar{q}_1^1, \bar{\theta}_2^1, \bar{q}_2^1; \dots \dots \bar{\theta}_1^N, \bar{q}_1^N, \bar{\theta}_2^N, \bar{q}_1^N \right)$$

Построение решения на тепловом графе описано в п. 3.1-3.6. В результате нам известно трансформанты температуры на графе.

2 э т а п. Определяем  $\tilde{\gamma}_j \hat{\partial}_x \theta_j$  в волновом уравнении (3.34):

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_j \partial_x \hat{\theta}_j(x, \omega) = & \tilde{\gamma}_j \partial_x \left\{ F_2^j(x, \omega) *_{x} \bar{U}_2^j(x, \omega) + \theta_0^j(x) H(L_j - x) H(x) *_{x} \bar{U}_2^j(x, \omega) + \right. \\ & + \kappa_j \bar{q}_2(\omega) H(x) \bar{U}_2^j(L_j - x, \omega) - \kappa_j \bar{q}_1(\omega) H(L_j - x) \bar{U}_2^j(x, \omega) - \\ & \left. - \kappa_j \bar{\theta}_2(\omega) H(x) \bar{U}_{2,x}^j(L_j - x, \omega) - \kappa_j \bar{\theta}_1(\omega) H(L_j - x) \bar{U}_{2,x}^j(x, \omega) \right\}. \end{aligned}$$

Затем определяем

$$\begin{aligned} \bar{P}_j(x, \omega) = & \bar{F}^j(x, \omega) *_{x} \bar{U}_1^j(x, \omega) + \\ & + \left\{ (\dot{u}_0(x) - i\omega u_0(x)) H(x) H(L-x) \right\} *_{x} \bar{U}_1^j(x, \omega) - \tilde{\gamma}_j \partial_x \bar{\theta}_j(x, \omega). \end{aligned}$$

3 э т а п. Решение волновой задачи на звездном графе, определение перемещений и напряжений на концах стержневых элементов графа

$$\text{Cl}^j(\omega) = \left( \bar{P}_j(0, \omega) - \tilde{\gamma}_j \partial_x \theta_j(0, \omega), \quad \bar{P}_j(L_j, \omega) - \tilde{\gamma}_j \partial_x \theta_j(L_j, \omega) \right)$$

по формулам теоремы 3.2.

4 э т а п. Определение трансформанты перемещений элементов графа по формулам 3.23.

5 э т а п. Восстановление оригиналов перемещений, напряжений, температуры и тепловых потоков по формулам обратного преобразования Фурье (2.21):

$$u_j(x, t) = \frac{H(L-|x|)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_j(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \theta_j(x, t) = \frac{H(L-|x|)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\theta}_j(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

$$j = 1, \dots, N.$$

Таким образом, аналитическое решение термоупругой задачи на звездном графе построено.

## ВЫВОДЫ

1. Построены аналитические решения краевых задач теплопроводности на звездном тепловом графе при заданных температуры либо тепловых потоков на его концах. Построенные решения программно реализованы в системе MatCad 15 для периодических колебаний двухзвенного теплового графа. Проведены компьютерные эксперименты по исследованию частоты колебаний и краевых условий на температуру графа.
2. Построены аналитические решения краевых задач теории упругости на упругом звездном графе при заданных перемещениях либо напряжениях на его концах. Построенные решения программно реализованы в системе MatCad 15 для периодических колебаний двухзвенного упругого графа. Проведены компьютерные эксперименты по исследованию частоты колебаний и краевых условий на перемещения звеньев графа.
3. Поставлены краевые задачи термоупругости на термоупругом звездном графе при различных перемещениях, напряжениях, температуры и тепловых потоков на его концах. Построены их аналитические решения, с использованием построенных решений на тепловых и упругих графах.
4. Получены регулярные интегральные представления решений можно использовать для исследования термодинамики различных сетеподобных конструкции с учетом теплового нагрева (охлаждения).
5. Разработанная методика решения различных краевых задач, типичных для практических приложений, может быть распространена на линейные графы и графы более сложной структуры.

Результаты работы, представленной в данном разделе, были опубликованы в двух статьях [2,3,8,9,10] (см. Публикации, стр 14) и представлены на конференциях [7-13] (см. Тезисы докладов, стр 15).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Рассмотрена математическая модель термоупругого стержня, основанная на системе уравнений несвязанной термоупругости в пространственно-одномерной постановке. Такая модель описывает динамику термоупругих стержневых конструкций под воздействием внешних силовых и тепловых источников. Решена задача построения фундаментальных решений данной системы уравнений с использованием аппарата обобщённых функций и преобразования Фурье. Построен тензор Грина, позволяющий получать обобщённые решения для произвольных распределений массовых сил и тепловых источников. Рассмотрены ударные упругие волны, которые возникают в таких конструкциях при действии ударных нагрузок. Полученные решения обобщают классические подходы и позволяют описывать широкий класс динамических процессов в термоупругих телах.
2. Выполнена численная реализация тензора Грина и ряда аналитических решений в программной среде Mathcad-15. Отдельно рассмотрена задача Коши для системы уравнений несвязанной термоупругости. С применением метода В.С. Владимирова задача сформулирована в соответствующем функциональном пространстве, и получено её обобщённое решение. Построено регулярное интегральное представление решения. Приведены результаты численных экспериментов в виде графиков, иллюстрирующих поведение стержня (перемещения, температурное поле, напряжения) при различных типах внешних возмущений.
3. Рассмотрены и решены пространственно-одномерные краевые задачи теплопроводности, теории упругости и термоупругости для стержня конечной длины, которые можно использовать для исследования различных стержневых конструкции в условиях теплового нагрева при действии динамических периодических и нестационарных нагрузок. На основе метода обобщённых функций построены обобщённые решения нестационарных и стационарных краевых задач при действии силовых и тепловых источников различного типа, в том числе стационарных источников периодических колебаний. Действующие источники могут быть заданы и сингулярными обобщёнными функциями, при различных краевых условиях на концах стержня. Получены регулярные интегральные представления обобщённых решений, которые дают аналитическое решение поставленных краевых задач. Особенность построенных решений делает их удобными для исследования сетевых термоупругих систем, которые можно моделировать термоупругими графами. Разработана единая методика решения различных краевых задач, типичных для практических приложений.
4. Разработаны алгоритмы и программно реализованы в системе MatCad 15 краевые задачи термодинамики стержня конечной длины с произвольными термодинамическими параметрами с краевыми условиями Дирихле, Неймана, Дирихле-Неймана. Проведены численные эксперименты определения температуры, перемещений, напряжений стержня при разных геометрических, тепловых и термоупругих параметров. Приведены результаты численных

экспериментов, которые демонстрируют высокую точность разработанных алгоритмов.

5. Разработана единая методика решения краевых задач теплопроводности на звездных графах. Построено аналитическое решение краевых задач теплопроводности на звездном графе при заданных температурах либо тепловых потоков на его концах (условия Дирихле или Неймана).
6. Построено аналитическое решение краевых задач динамики упругого и термоупругого N-звездного графа при заданных нестационарных и периодических перемещениях концов графа и температуры либо напряжений и тепловых потоков на его концах.
7. В системе MatCad 15 проведена численная реализация решение краевых задач теплопроводности на двухзвенном графе при периодических изменениях температуры или тепловых потоков на его концах. Проведены компьютерные эксперименты по определению влияния частоты колебаний и тепловых параметров на тепловое состояние графа. Результаты расчетов представлены в графическом виде.
8. В системе MatCad 15 проведена численная реализация решений краевых задач с условиями Дирихле и Дирихле-Неймана динамики термоупругого двухзвенного графа. Проведены компьютерные эксперименты по определению влияния частоты колебаний и упругих параметров на напряженно-деформированное состояние графа. Результаты расчетов представлены в графическом виде.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Thomson J.J. Applications of Dynamics to Physics and Chemistry. - Macmillan, 1888 .
- 2 Duhamel. J.M. Mechanics course at the Ecole Polytechnique. Paris, Bachelier, 1845-1846; in 2 vol.
- 3 Biot M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics/ Journal of Applied Physics, 1956. – V. 27, – No 3. – p. 240 – 253.
- 4 Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. Пер. С польского под ред. Шапиро Г.С. – М.: Мир,1970. – 256 с.
- 5 Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975.
- 6 Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Киев: Наукова думка, 1970.
- 7 Коваленко А.Д. Термоупругость. Учебное пособие. – Киев: Вища школа, 1975. – 215
- 8 Hetnarski R.B. Encyclopedia of Thermal Stresses - Springer, 2014. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7>.
- 9 Shorr, B. F. (2015). Thermoelasticity. Thermal Integrity in Mechanics and Engineering, 33–56. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-46968-2\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-662-46968-2_2)
- 10 Banerjee, B. (2006). Basic Thermoelasticity. [https://doi: http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.1.1144.2005](https://doi.org/http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.1.1144.2005)
- 11 Бабенков М.Б. Анализ распределения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока// Прик. Мех. Тех. Физ. – 2013. – Т. 54. – №2. – С.126-137.
- 12 Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости.- М.-1963. – 472 с.
- 13 Купрадзе В.Д. Гегелиа Т.Г. Башелешвили М.О. Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости – М: «Наука», 1976. – 664с.
- 14 Fleurier J., Predeleanu M. On the use of coupled fundamental solutions in boundary element method for thermoelastic problems. // Eng. Anal.- 1987.- 4.- N2. – P.70-74
- 15 Dargush G.E., Banerjee P.K. Boundary element methods in three-dimensional thermoelasticity // Int.J.Solid and Structure. 1990.-2.-P. 199-216.
- 16 Sah J., Tasaka N. Boundary element analysis of linear coupled thermoelasticity problems by using Laplace transformation /Boundary Elem. Meth. Appl. Mech. Proc 1st Joint Jap., US Symp. Boundary Elem. Meth.- Tokyo, 3-6 Oct, 1988. – P. 335-544.
- 17 Алексеева Л.А., Купесова Б.Н. Метод обобщенных функций в краевых задачах связанной термоэластодинамики //Прикладная математика и механика. – Т.65 (2001).- №2. – С.334-345.
- 18 Sharp S., Crouch S.L. Boundary integral methods for thermoelasticity problems //Trans. ASME: J. Appl. Mech.- 1986.- Vol.53.- 2.- P.298-302
- 19 Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Жанбырбаев Н.Б. Метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах несвязанной

- термоэластодинамики // Прикладная математика и механика. 1999. Т.63 Вып.5. – С.853-859.
- 20 Алексеева Л.А., Дадаева А.Н. О единственности решений краевых задач термоупругости с учетом термоударных волн // Вестник КазНТУ им. К.Сатпаева. Серия математика, механика и информатика. 2013. – № 28 – с. 211-223.
  - 21 Leonhardus Eulerus. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. 1736.
  - 22 Dénes König. Theorie der endlichen und unendlichen. 1936.
  - 23 Dénes König. Theory of finite and infinite graphs. Boston: Birkhäuser, 1990.
  - 24 Lumer G. Connecting of local operators and evolution equations on network. Lect. Notes Math., Berlin: Springer, 1980, v.787, p. 219-234.
  - 25 Belov J. Classical solvability of linear parabolic equations on networks. Journal of differential equations, 1988, v. 72, p. 316-337.
  - 26 Nicaise S., Penkin O. Relationship between the lower frequency spectrum of plates and network of beams. Math. Mech. Appl. Sai., 2000, v.23, p.1389-1399.
  - 27 Borg G. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Acta Math., 1946, v.78, 1-96.
  - 28 Levitan B.M., Sargsyan I.S. Operators Sturm-Liouville and Dirac, Moscow: Nauka, 1988; 432 p.
  - 29 Provotorov, V.V. Eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem on a star graph. Sb. Math. 2008, 199, 1523–1545.
  - 30 Yurko V.A. On the reconstruction of Sturm-Liouville operators on graphs Math. Notes, 2006, v. 79, issue 4, 619-630.
  - 31 Yurko V.A. An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with singular potentials on star-type graphs. Analysis on graphs and its applications. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Amer. Math. Soc, Providence, 2008, v. 77, 397-408.
  - 32 Zhabko A.P., Nurtazina K.B., Provotorov V.V. Uniqueness solution to the inverse spectral problem with distributed parameters on the graph-star. Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes, 2020, v. 16, issue 2, 129–143. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.205>
  - 33 Kanguzhin B.E, Seitova A.A. On degenerate Sturm-Liouville boundary value problems on geometric graphs. Journal of Mathematics Mechanics and Computer Science. 105(1), (2020), 79-86. <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.07>
  - 34 Kanguzhin B.E., Kaiyrbek Zh.A., Mustafina M.A. Recovering of the Stiffness Coefficients of the Sturm–Liouville Operator on a Star Graph from a Finite Set of Its Eigenvalues. Lobachevski Journal of Mathematics. 45 (2024), 2711–2716. <https://doi.org/10.1134/s1995080224602881>
  - 35 Ali Mehmeti, F. A. Characterization of generalized notion on nets. Int. Equ. Oper. Theory 1986, 9, 753–766.
  - 36 Cattaneo, C.; Fontana, L. D’Alembert formula on finite one-dimensional networks. J. Math. Anal. Appl. 2003, 284, 403–424.

- 37 Friedman, J.; Tillich, J.-P. Wave equations for graphs and the edge-based Laplacian. *Pac. J. Math.* 2004, 216, 229–266.
- 38 Cox, S.; Zuazua, E. The rate at which energy decays in a damped string. *Commun in Partial Diff. Equ.* 1994, 19, 213–243.
- 39 Komornik, V.; Zuazua, E. A direct method for the boundary stabilization of the wave equation. *J. Math. Pures Appl.* 1990, 69, 33–54.
- 40 Dager, R.; Zuazua, E. Spectral boundary controllability of networks of strings. *Comptes Rendus Math.* 2002, 334, 545–550.
- 41 Zuazua, E. Control and stabilization of waves on 1-d networks. *Lect. Notes Math.* 2013, 2062, 463–493.
- 42 Ammari, K.; Jellouli, M. Remark on stabilization of tree-shaped networks of strings. *Appl. Math* 2007, 52, 327–343.
- 43 Ammari, K.; Jellouli, M.; Khenissi, M. Stabilization of generic trees of strings. *J. Dyn. Control Syst.* 2005, 11, 177–193.
- 44 Schmidt, E.J.P.G. On the modelling and exact controllability of networks of vibrating strings. *SIAM J. Control Optim.* 1992, 30, 229–245.
- 45 Avdonin, S.A.; Zhao, Y. Exact controllability of the 1-D wave equation on finite metric tree graphs. *Appl. Math. Optim.* 2021, 83, 2303–2326.
- 46 Avdonin, S.A.; Nicaise, S. Source identification problems for the wave equation on graphs. *Inverse Probl.* 2015, 31, 095007.
- 47 Avdonin, S.A. Control, observation and identification problems for the wave equation on metric graphs. *IFAC-PapersOnLine* 2019, 52, 52–57.
- 48 Avdonin, S.A.; Avdonina, N.; Zhao, Y. Exact controllability for the wave equation on star graphs. *IFAC-PapersOnLine* 2019, 52, 30–35.
- 49 Zhong-Jie Han, Zuazu E., Decay rates elastics-shaped networks, *J. Netw. Heterog. Media.* 12, (2017) 461-488. <https://doi.org/10.3934/nhm.2017020>
- 50 Korovina, O.V.; Pryadiev, V.L. Structure of mixed problem solution for wave equation on compact geometrical graph in nonzero initial velocity case. *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.* 2009, 9, 37–46.
- 51 Zhong-Jie Han, Zuazu E. Decay rates elastics-shaped networks, *Netw. Heterog. Media*, 2017, 12, 461-488. <https://doi.org/10.3934/nhm.2017020>
- 52 Ghulam Hazrat Aimal Rasa, B.E.Kanguzhin, Zhalgas A. Kaiyrbek. Propagation of waves along the star-graph. *Kazakh Mathematical Journal.* 21(2), (2021), 6-14. <https://www.researchgate.net/publication/359024847>
- 53 Alexeyeva, L.A.; Arepova, G.D. Generalized solutions of boundary value problems for the d’Alembert equation with local and associated boundary conditions. *Bull. L.N. Gumilyov ENU. Math. Comput. Sci. Mech. Ser.* 2022, 138, 23–35.
- 54 Martynov Yu.V. About one problem of heat propagation in a system of rods on a graph of the “Tree” type. *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications, Thematic reviews,* 2021, v. 198, 89–95. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-198-89-95>
- 55 Arshidinova M., Tashev A., Kudaykulov A. Developing a method of accounting for the existence of local surface heat exchange in rods of variable cross-section//

- Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3(7 (123), 53–64.  
<https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.273635>
- 56 Kudaykulov A., Zhumadillayeva A. Numerical simulation of temperature distribution in beam bulk in the simultaneous presents of heat insulation, heat flux and heat exchange // Journal Acta Physica polonica. 2016; 3: 335-336.
- 57 Kudaykulov A., Tashev A., Zhumadillayeva A. Investigation of the steady nonlinear thermomechanical state of a rod of limited lengths and constant cross-section in the presence of symmetrical local thermal insulation, lateral heat and heat fluxes // Journal of Advanced Physics. 2018; 7: 522-526.
- 58 Mishchenko A. Spatially Structure Spatial Problem of the Stressed-Deformed State of a Structural Inhomogeneous Rod. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, (2020). 953, 012004. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/953/1/012004>
- 59 Алексеева Л.А. Стационарные краевые задачи динамики термоупругих стержней. Известия НАН РК. Серия физико-математическая. №3, стр 144-152, 2014.
- 60 Алексеева Л.А., Ахметжанова М.М. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней. 1. Стационарные колебания, Математический журнал, №14(2), стр.5–20, 2014.
- 61 Алексеева Л.А., Ахметжанова М.М. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней. 2. Первая краевая задача стационарных колебаний. Том 15, №3 (57), с. 5-22, 2015.
- 62 Alexeyeva, L.A.; Akhmetzhanova, M.M. Spatially one-dimensional boundary value problems of coupled thermoelasticity: Generalized functions method. Mech. Solids 2022, 57, p. 2151–2165.
- 63 Alexeyeva L.A., Akhmetzhanova M.M. Stationary oscillations of thermoelastic rod under action of external disturbances // Global Journal of Engineering Science and Research Management. – 2018. – № 2. – Volume 5. – p. 33-43. <https://doi.org/10.5281/zenodo.1186513>.
- 64 Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.1978. 518 с.
- 65 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М:Наука, 1979.
- 66 Владимиров В.С. Уравнения математической физики - М:Наука, 1981
- 67 Alexeyeva L.A. The method of generalized functions in non-stationary boundary value problems for the wave equation. Math. J.2006, 6, p. 16–32.
- 68 В.С.Кушнер, А.С.Верещака, А.Г.Схиртладзе, Д.А.Негров, О.Ю.Бугронова; под ред. В.С.Кушнера. Материаловедение. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2008. – 232 с.
- 69 Samarskii A.A. Parabolic equations with discontinuous coefficients, DAN SSSR. 121:2 (1958), 225–228.
- 70 Kamynin L.I. On the solution of boundary value problems for a parabolic equation with discontinuous coefficients, DAN SSSR, 139:5 (1961), 1048–1051.

- 71 Kamynin L.I. On the method of potentials for a parabolic equation with discontinuous coefficients. DAN SSSR, 145:6 (1962), 1213–1216.
- 72 Koilyshov U.K., Sadybekov M.A. On a nonlocal problem for the heat equation with a piecewise constant coefficient//Bulletin of the Aktobe Regional University named after K. Zhubanov, Physical and Mathematical Sciences. 68:2 (2022), 95–102.